TERMODINAMICĂ

A. HRISTEV

PROBLEME REZOLVATE DE FIZICĂ

EDITURA APH
BUCUREŞTI

Dr. Fiz. **ANATOLIE HRISTEV**

PROBLEME REZOLVATE

DE

FIZICĂ

TERMODINAMICĂ. FIZICĂ MOLECULARĂ. CĂLDURĂ



EDITURA **APH** Bucureşti

BREVIAR

Molul este *cantitatea de substanță* a unui sistem care conține tot atâtea *entități elementare* câți *atomi* există în 12 g de carbon 12. Entitățile elementare pot fi atomi, molecule, ioni, electroni, alte particule sau grupuri specificate de asemenea particule.

Unitatea atomică de masă este egală cu a 12-a parte din masa atomului de carbon ^{12}C. Atunci rezultă:

$$1\ \text{u}\ [\text{kg}] = 10^{-3} : \{N_A\ [\text{mol}^{-1}]\}\ . \qquad (1)$$

Masa molară μ [kg/mol] și masa *moleculară* M [u] sunt legate prin relația:

$$\mu\ [\text{kg/mol}] = 10^{-3}\ M\ [\text{u}]\ . \qquad (2)$$

Legea lui Dalton. Presiunea unui *amestec de gaze* este egală cu suma presiunilor *parțiale* ale gazelor componente. Prin presiunea *parțială* a unui gaz component se înțelege presiunea pe care ar exercita-o acel gaz component dacă ar ocupa *singur* întregul volum al amestecului la aceeași temperatură, adică abstracție făcând de prezența celorlalte gaze din amestec :

$$p = \sum p_k = \sum \frac{m_k}{\mu_k} \frac{RT}{V} = \sum \nu_k \frac{RT}{V} = \sum_i n_i\, kT. \qquad (3)$$

Observație. În problemele unde apar coloane de lichid (apă, mercur, etc.) este comod să exprimăm presiunile în **mm.col.lich.** Unitatea **mm.col.lich.** este egală cu presiunea exercitată de o coloană de 1 mm din acel lichid la temperatura 0°C și accelerația gravitațională *normală* $g_n = 9{,}80665\ \text{m/s}^2$:

$$1\ \text{mm.col.lich.} = \rho_0 g_n \cdot 10^{-3}\ \text{Pa}\ . \qquad (4)$$

Atunci presiunea unei coloane (sau pături) de lichid exprimată în mm.col.lich. este

$$H_{[\text{mm.col.lich.}]} = \frac{\rho g h_{[\text{m}]}}{\rho_0 g_n \cdot 10^{-3}} = \frac{\rho g}{\rho_0 g_n}\, h_{[\text{mm}]}\ . \qquad (5)$$

Dacă neglijăm corecţiile de temperatură (densitate) şi gravitaţie :

$$H_{[\text{mm.col.lich.}]} \cong h_{[\text{mm}]} \,. \qquad (6)$$

Pentru mercur avem aproximativ:

$$\rho g \cong 133 \text{ kPa/m} \cong (400/3) \text{ kPa/m} = (4/3) \text{ kPa/cm} \,. \qquad (7)$$

Presiunea atmosferică *normală*: p_0 = 101,325 kPa = 760 torr, deci

$$p_0 / [\rho_{Hg}\, g_n] = 0{,}760 \text{ m} \;\; \text{şi} \;\; p_0 / [\rho_{ap\bullet}\, g_n] = 10{,}332 \text{ m} \,. \qquad (8)$$

*

Lucrul mecanic elementar efectuat de gaz într-o destindere (cvasistatică, de echilibru) *elementară* (parametrii de stare *V, p, T* se schimbă infinit de puţin) :

$$\mathrm{d}L = p\,\mathrm{d}V \;, \text{ de unde } \quad L = \int \mathrm{d}L = \int_{V_1}^{V_2} p \mathrm{d}V . \qquad (9)$$

Pentru a putea efectua integrarea trebuie exprimată presiunea *p* ca funcţie de volumul *V* în procesul considerat.

Ecuaţia primului principiu al termodinamicii :

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}L \quad \text{sau} \quad Q = \Delta U + L \,, \qquad (10)$$

unde pentru gaze *perfecte* (ecuaţia ***calorică** de stare*) :

$$\mathrm{d}U = \nu C_V \mathrm{d}T \quad \text{(legea lui Joule)} \,. \qquad (11)$$

Definiţia căldurilor *molare* (indicele din dreapta derivatei indică care parametru se menţine *constant* la derivare) :

$$C_V = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right)_V = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V , \quad C_p = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right)_p = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p , \qquad (12)$$

unde $\qquad H = U + pV \qquad (13)$

este ***entalpia*** (funcţie de stare).

Teoria clasică a *căldurilor molare* la gaze ideale :

Gaze:	C_V , J/(mol · K)	C_p , J/(mol · K)	$\gamma = C_p/C_V = c_p/c_V$
monoatomice (He,Ne,Ar,Kr,X,Rn)	$3\,R/2 = 12{,}5$	$5\,R/2 = 20{,}8$	$5/3 = 1{,}67$
diatomice (H_2,O_2,N_2,CO,NO)	$5\,R/2 = 20{,}8$	$7\,R/2 = 29{,}1$	$7/5 = 1{,}40$
triatomice sau *poli-atomice* (fără vibraţia atomilor) (O_3,CO_2,NH_3,CH_4)	$6\,R/2 = 3\,R = 24{,}9$	$4\,R = 33{,}3$	$4/3 = 1{,}33$

La gazele *monoatomice* avem numai energia cinetică de translație $\frac{1}{2}m_0\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT$. La gazele *diatomice* se adaugă şi energia cinetică de *rotație* (modelul *halteră* al moleculei), în total $5kT/2$. La gazele *triatomice* sau *poliatomice*, fără vibrația atomilor în moleculă (molecule "rigide"), avem în total $3kT$.

Principiul II al termodinamicii afirmă existența unei funcții de *stare* numită ***entropie***. Într-un proces *reversibil* :

$$dS = dQ / T, \quad dQ = T\,dS \tag{14}$$

şi combinând cu principiul I :

$$T\,dS = dU + dL. \tag{15}$$

*

Distribuția moleculelor după viteze (*Maxwell* 1859):

$$dn(v) = n\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m_0v^2/(2kT)}\,4\pi v^2 dv = nf(v)\,dv, \tag{16}$$

unde $dn(v)$ este numărul de molecule din unitatea de volum care au modulul vitezei cuprins în intervalul $(v, v+dv)$, m_0 - masa unei molecule,

$$\frac{dn(v)}{n\,dv} = f(v) = 4\pi v^2\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m_0v^2/(2kT)} \tag{17}$$

reprezintă ***funcția de distribuție*** sau *densitatea de probabilitate*, adică probabilitatea ca o moleculă să aibă viteza în intervalul $(v, v+dv)$ raportată la intervalul dv (per unitate de interval de viteze) (fig.1) sau, altfel, $dP = f(v)dv$ reprezintă probabilitatea ca o moleculă să aibă viteza în intervalul $(v, v + dv)$.

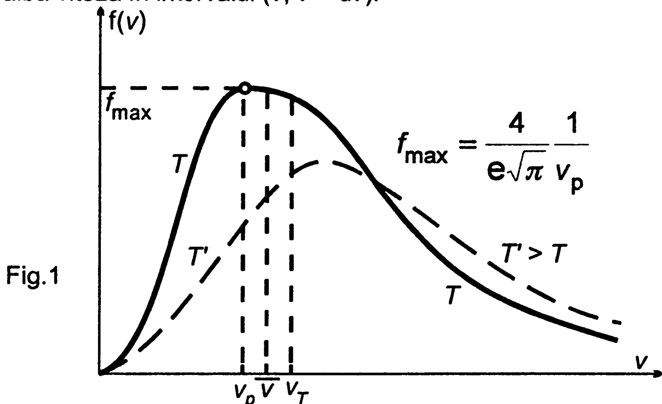


Fig.1

Numărul de molecule care lovesc o arie elementară dS a unui perete, în intervalul de timp infinitezimal dt şi au modulul vitezei cuprins în intervalul infinitezimal (v, v+dv) este

$$(1/4)\, n\, f(v)\, v\, dv\, dS\, dt,$$

de unde rezultă numărul de molecule care lovesc *unitatea* de arie a unui perete, în *unitatea* de timp şi au modulul vitezei în intervalul (v, v+dv):

$$dN_0(v) = (1/4)\, n\, f(v)\, v\, dv. \tag{18}$$

Integrând după viteze, găsim numărul total de molecule care lovesc unitatea de arie a unui perete, în unitatea de timp:

$$\int dN_0 = N_0 = \frac{1}{4} n \int v f(v)\, dv = \frac{1}{4}\, n\, \bar{v}, \tag{19}$$

ceea ce reprezintă *densitatea fluxului* (curentului) de molecule, $\bar{v} = \sqrt{8RT/(\pi\mu)}$ este viteza *medie* a moleculelor.

Distribuţia moleculelor după coordonate (*Boltzmann*) :

$$dN(x,y,z) = \text{const} \cdot e^{-\varepsilon_p/(kT)}\, dV \tag{20}$$

sau

$$\rho(x,y,z) = \text{const} \cdot e^{-\varepsilon_p/(kT)}, \tag{21}$$

unde d$N(x,y,z)$ este numărul de molecule din elementul de volum dV situat în punctul (x,y,z), $\varepsilon_p(x,y,z)$ este energia potenţială a particulei , ρ - densitatea.

Formula barometrică dă distribuţia în înălţime a densităţii gazului, a presiunii sau a concentraţiei moleculelor (la T = const şi g = const):

$$\rho = \rho_0\, e^{-\mu g z/(RT)}, \quad n = n_0\, e^{-\mu g z/(RT)}, \tag{22}$$

$$p = p_0\, e^{-\mu g z/(RT)}, \tag{23}$$

unde μ este masa molară (μ_{aer} = 28,97 g/mol ≅ 29 g/mol).

*

Coeficientul de tensiune superficială σ este egal cu forţa tangentă la planul peliculei şi normală la conturul peliculei, raportată la lungimea marginii peliculei superficiale de lichid (forţa pe unitatea de lungime) sau altfel, este egal cu minus lucrul mecanic efectuat *izoterm* de pelicula superficială raportat la aria peliculei (energia superficială pe unitatea de arie) :

$$\sigma = \frac{dF}{ds} = -\frac{dL}{dS} \quad , \qquad [\sigma] = \text{N/m} = \text{J/m}^2 \,. \qquad (24)$$

La o peliculă superficială *curbată* presiunea de partea concavă este mai mare decât de partea convexă cu *saltul de presiune* (formula lui **Laplace**) :

$\Delta p = 2\sigma / R$ (sferă) , $\Delta p = \sigma / R$ (cilindru), (25)

unde R este *raza de curbură* a meniscului sferic sau cilindric.

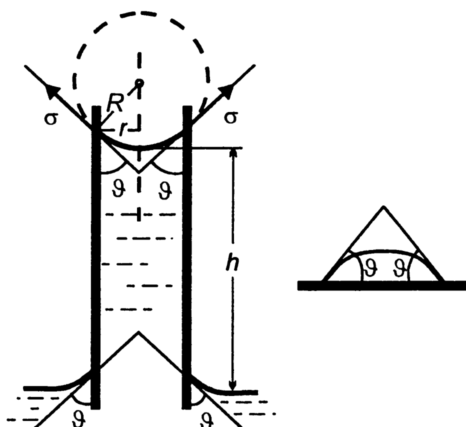


Fig.2 a

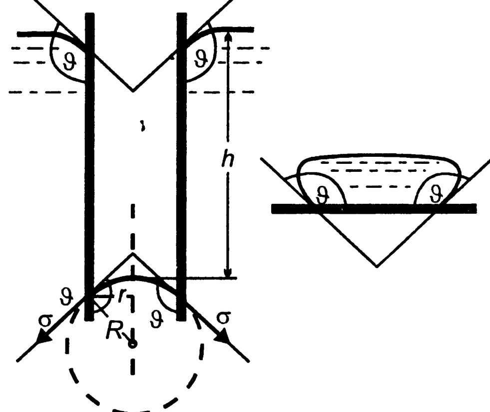


Fig.2 b

Ascensiunea (sau *depresiunea*) capilară este dată de ***legea lui Jurin*** (R - raza de curbură a meniscului, r - raza tubului , d - distanța dintre plăci) :

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R} = \frac{2\sigma\cos\vartheta}{\rho g r} \quad \text{(tub)} \tag{26}$$

$$h = \frac{\sigma}{\rho g R} = \frac{2\sigma\cos\vartheta}{\rho g d} \quad \text{(plăci paralele)}\ , \tag{27}$$

unde ϑ este ***unghiul de racordare*** (de umectație), egal cu zero la lichidele care udă *perfect* pereții, şi egal cu π la cele care *nu* udă *deloc* (fig.2).

*

Viteza de evaporare v [kg/s] a unui lichid :

$$v = KS\frac{p_s - p_v}{H}\ , \tag{28}$$

unde K este o constantă de proporționalitate, S - aria suprafeței libere prin care se produce evaporarea , p_s - p_v - *deficitul higrometric* , p_s - presiunea vaporilor *saturanți* la temperatura evaporării (vaporii ***saturanți*** sunt vaporii în ***echilibru termic*** cu lichidul din care provin), p_v - presiunea ***actuală*** a vaporilor din vecinătatea suprafeței de evaporare.

Umiditatea absolută a aerului este egală cu *densitatea* vaporilor de apă conținuți în aerul respectiv (ρ_v în g/m^3).

Umiditatea relativă :

$$U = \rho_v / \rho_s = p_v / p_s\ , \tag{29}$$

unde ρ_v, p_v sunt densitatea şi presiunea ***actuale*** ale vaporilor de apă din aer, iar ρ_s, p_s corespund vaporilor *saturanți* la aceeaşi temperatură.

Punctul de rouă este temperatura la care vaporii din aer devin ***saturanți*** prin răcirea unui volum de aer.

*   *   *

1. LEGILE GAZULUI PERFECT

1.1. Transformările izocoră şi izobară

1.1.1. ***O butelie a fost astupată la temperatura*** t_1 = 27°C ***şi la presiunea atmosferică*** p_1 = 100 kPa ***cu un dop de secţiune*** S = 4,0 cm², ***depunând un efort*** F = 10,0 N. ***Până la ce temperatură trebuie încălzită butelia pentru ca dopul să sară ?***

Rezolvare. Iniţial, la introducerea dopului, presiunea gazului din butelie era egală cu presiunea atmosferică, deci forţa depusă F trebuie să învingă forţa de *frecare* dintre dop şi pereţii de sticlă : $F = F_f$. Prin încălzirea buteliei, presiunea gazului din interior creşte, conform legii transformării *izocore* (legea lui ***Charles***):

$$p_2 / p_1 = T_2 / T_1 , \qquad p_2 = p_1 T_2 / T_1 . \qquad (1)$$

Forţa asupra dopului generată de diferenţa de presiune din interior şi exterior trebuie să învingă forţa de frecare pentru a putea azvârli dopul, deci

$$(p_2 - p_1)S \geq F = F_f , \quad p_1(T_2 / T_1 - 1)S = F , \qquad (2)$$

$$T_2 = T_1 [F / (Sp_1) + 1] = 375 \text{ K} = 102°\text{C}. \qquad (3)$$

1.1.2. ***Un vas izolat este împărţit în două compartimente printr-un perete* termoconductor. *Iniţial gazele din compartimente au temperaturile*** t_1 = 17°C ***şi*** t_2 = 127°C ***şi raportul presiunilor este*** $p_1 / p_2 = 2,9$.***Care va fi raportul presiunilor după terminarea schimbului de căldură ?***

Rezolvare. Fiecare gaz din compartimentul său suferă o transformare *izocoră* (T' - temperatura finală comună de echilibru):

$$p_1' / p_1 = T' / T_1 , \quad p_2' / p_2 = T' / T_2 . \qquad (1)$$

Împărţind membru la membru cele două ecuaţii, obţinem :

$$(p_1' / p_2') (p_2 / p_1) = T_2 / T_1 \rightarrow p_1' / p_2' = p_1 T_2 / (p_2 T_1) = 4,0. \qquad (2)$$

1.1.3. ***O eprubetă de lungime*** ℓ = 16 cm ***este cufundată în întregime cu capătul său deschis în mercur la temperatura*** t = = 27°C ***şi presiunea atmosferică* normală, *astfel încât coloana de aer are lungimea*** h = 40 mm. ***Se scoate eprubeta vertical afară, astfel ca gura ei să se atingă totuşi de suprafaţa mercurului, ca în figură. Cu câte grade trebuie răcită acum eprubeta pentru ca coloana de aer să revină la lungimea sa iniţială ?***

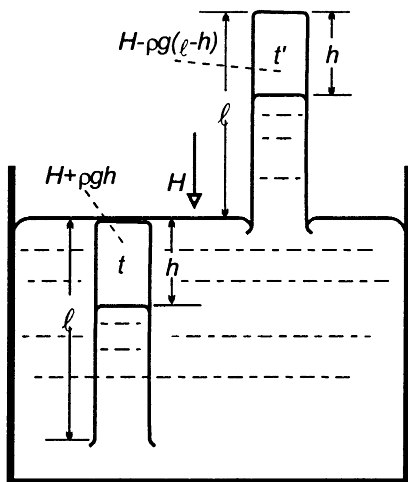


Fig.1.1.3

Rezolvare. Inițial aerul ocupă volumul Sh la temperatura t şi presiunea $H + \rho gh$ (presiunea atmosferică H plus presiunea *hidrostatică* a stratului de mercur ρgh). Final, aceeaşi masă de aer ocupă *acelaşi* volum (deci transformare *izocoră*) la temperatura t' şi presiunea $H - \rho g(\ell - h)$, adică presiunea atmosferică H *minus* presiunea hidrostatică a coloanei de mercur $\rho g(\ell - h)$:

$$[H - \rho g(\ell - h)] : [H + \rho gh] = (T - \Delta T) : T \ , \qquad (1)$$

$$\Delta T = T - T[H - \rho g(\ell - h)] : [H + \rho gh] = T\,\ell : [h + H/(\rho g)] = 60 \text{ K} . \qquad (2)$$

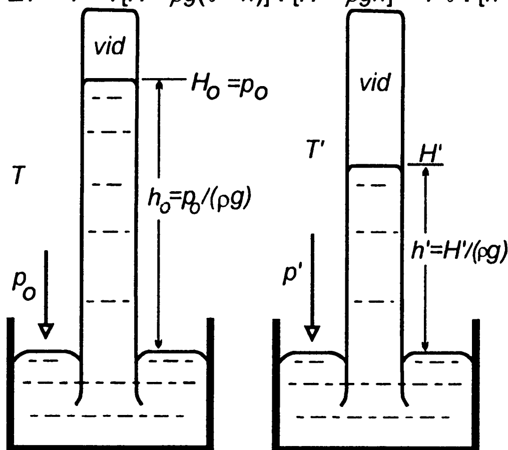


Fig.1.1.4

1.1.4. ***În cabina unei navete spaţiale presiunea iniţială a fost cea*** normală. ***În timpul decolării verticale cu acceleraţia*** $a = 9{,}8\ m/s^2$, ***barometrul cu mercur începe să arate presiunea*** $H' = 55{,}73$ kPa. ***De câte ori a crescut temperatura absolută Kelvin din cabină ?***

Rezolvare. Presiunea atmosferică H este echilibrată de presiunea hidrostatică a coloanei de mercur $H = \rho g h$. Barometrul este etalonat conform *înălţimii barometrice* h, dar în condiţii *standard* de 0^oC şi acceleraţie gravitaţională *normală* $g_n = 9{,}80665\ m/s^2$. Prin urmare, presiunea *hidrostatică* depinde nu numai de densitatea lichidului folosit, ci şi de *acceleraţia gravitaţională* g (intensitatea *câmpului gravitaţional*). Dar, dacă barometrul urcă cu acceleraţia $\vec{a}$, totul se petrece ca şi cum barometrul ar sta pe loc, dar ar mai acţiona suplimentar un câmp *gravitaţional* echivalent $\vec{g}_{ech} = -\vec{a}$, care se adaugă la cel existent : $\vec{g}\,' = \vec{g} + \vec{g}_{ech} = \vec{g} - \vec{a}$. În cazul problemei sensul lui $-\vec{a}$ este acelaşi cu $\vec{g}$, mercurul devine mai "greu" şi presiunea coloanei de mercur va fi în al doilea caz :

$h'\rho g' = h'\rho(g + a) = [H'/(\rho g)]\,\rho(g + a) = H'(g + a)/g = p'$, (1)

egală cu presiunea din cabină. Cum aerul din cabină suferă o transformare *izocoră*, avem :

$$T'/T = p'/p_o = [H'(g + a)/g] : p_o = 1{,}10 . \qquad (2)$$

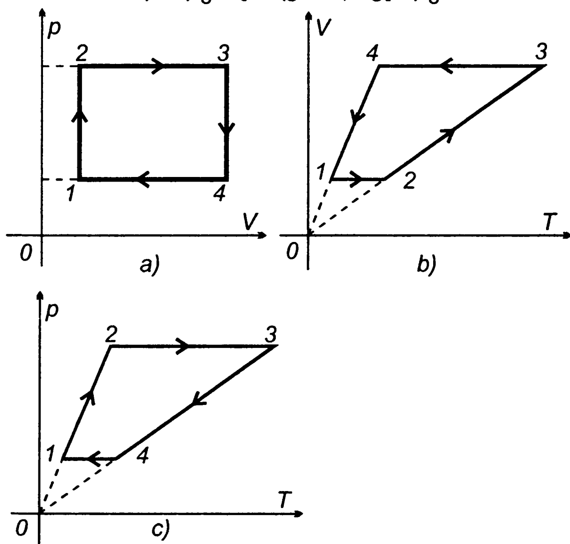


Fig.1.1.5

1.1.5. ***Pentru ciclul din figură se dau temperaturile :*** $T_1 =$ $= 300$ K, $T_2 = 400$ K, $T_3 = 500$ K. ***Aflaţi*** T_4. ***Desenaţi ciclul în diagramele*** V - T ***şi*** p - T .

Rezolvare. Avem succesiv pentru transformările *izocore* :

$p_2 / p_1 = T_2 / T_1$, dar $p_2 / p_1 = p_3 / p_4 = T_3 / T_4 \rightarrow$

$T_2 / T_1 = T_3 / T_4$, $\quad T_4 = T_1 \, T_3 / T_2 = 375$ K . (1)

Se poate judeca şi folosind transformările *izobare* :

$V_4 / V_1 = T_4 / T_1$ dar $V_4 / V_1 = V_3 / V_2 = T_3 / T_2 \rightarrow T_4 / T_1 = T_3 / T_2$.

În diagramele V - T , p - T izobarele, respectiv izocorele sunt *drepte* care trec prin *origine*. Observăm că în V - T sensul de parcurgere a ciclului se inversează.

* *

1.2. Transformarea izotermă

1.2.1. ***Transcrieţi ciclul din fig.1.2.1 a în diagramele*** p - V; p -T.

Rezolvare. V. fig.1.2.1 b, c. Observăm că în diagramele *V - T*, *p - T* izobarele, respectiv izocorele sunt *drepte* care trec prin origine.

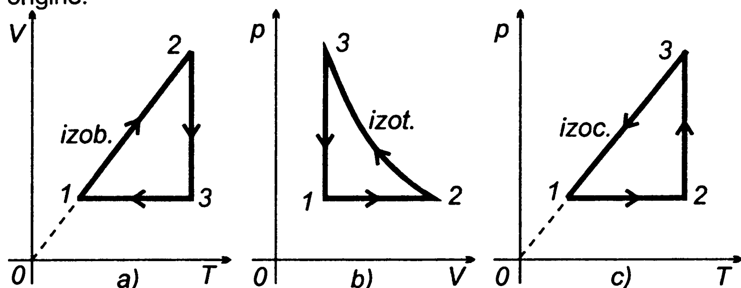


Fig.1.2.1

1.2.2. ***Reprezentaţi ciclul din fig.1.2.2 a în diagramele*** V-T, p -T.

Rezolvare. V. fig.1.2.2 b, c. În diagrama *V - T* sensul de parcurgere a ciclului se inversează.

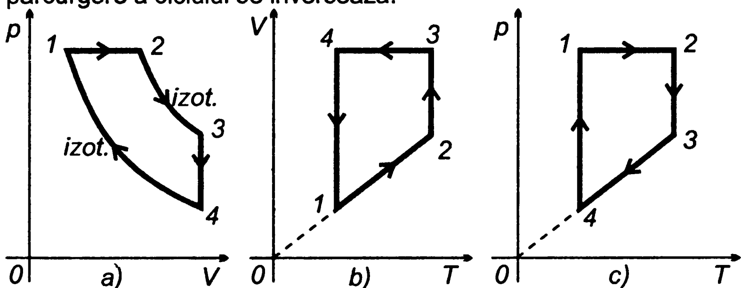


Fig.1.2.2

1.2.3. ***Transcrieţi ciclul din fig.1.2.3 a în diagramele*** V-T ***şi*** p -T.

Rezolvare. V. fig.1.2.3 b, c.

1.2.4. ***Se dă ciclul din fig.1.2.2 a. Completaţi tabelul cunoscând parametrii în starea 1. Transcrieţi ciclul în diagramele*** *V - T , p - T.*

Rezolvare. V. fig.1.2.2 b, c.

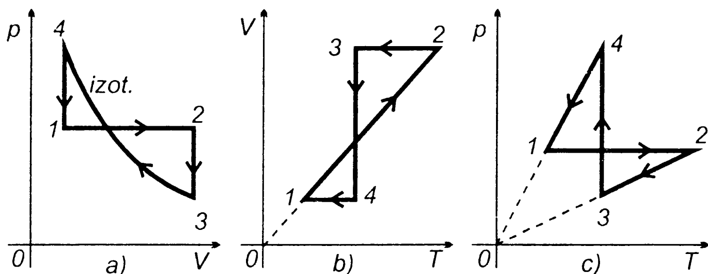


Fig.1.2.3

	p	V	T
1	p_1	V_1	T_1
2			βT_1
3		αV_1	
4			

	p	V	T
1	p_1	V_1	T_1
2	p_1	βV_1	βT_1
3	$\beta p_1/\alpha$	αV_1	βT_1
4	p_1/α	αV_1	T_1

Transformarea *1 - 2* este *izobară*, deci

$$V_2 / V_1 = T_2 / T_1 = \beta T_1 / T_1 \quad \rightarrow \quad V_2 = \beta V_1 . \qquad (1)$$

Transformarea *2 - 3* este *izotermă*, deci

$$p_2 V_2 = p_1(\beta V_1) = p_3 V_3 = p_3(\ \alpha V_1)\ \ p_3 = \beta p_1 / \alpha \ . \qquad (2)$$

Transformarea *3 - 4* este *izocoră*, deci

$$p_3 / p_4 = [\beta p_1 / \alpha] : p_4 = T_3 / T_4 = T_2 / T_1 = \beta T_1 / T_1 \rightarrow p_4 = p_1 / \alpha . \qquad (3)$$

1.2.5. ***Un aerostat a fost umplut cu*** f = 50 % ***din volumul său cu*** **heliu** ***la presiunea atmosferică*** H = 100 kPa. ***La ce înălțime heliul va umfla complet aerostatul, ştiind că gradientul presiunii atmosferice este*** p* = - 10,0 Pa/m ***?. Temperatura se consideră constantă.***

Rezolvare. La altitudinea *h* presiunea va fi $H + p^* h$. Atunci *legea* ***Boyle-Mariotte*** dă

$$H \cdot fV = (H + p^* h)\ V , \qquad (1)$$

$$h = (1 - f)\ H / (\ - p^*) = 5{,}0 \text{ km} . \qquad (2)$$

1.2.6. ***Un cilindru orizontal este împărțit în două compartimente de lungime*** h_1 = 10 cm , h_2 = 30 cm ***printr-un piston care se poate mişca etanş fără frecări şi care inițial este blocat. În primul compartiment presiunea este de*** k = 3,0 *ori* ***mai mare decât în al doilea. Cu cât se deplasează pistonul dacă se lasă liber ?***

Rezolvare. În starea finală de echilibru presiunea gazului de o parte şi de alta a pistonului va fi aceeaşi, p'. Gazul din fiecare compartiment suferă o transformare *izotermă* la temperatura mediului ambiant :

$$k p \cdot h_1 S = p'(h_1 + x)S ; \quad p h_2 S = p'(h_2 - x)S , \qquad (1)$$

de unde, împărţind ecuaţiile membru la membru, rezultă :

$$k h_1/h_2 = (h_1 + x)/(h_2 - x) , \quad x = h_1 (k - 1) : (1 + kh_1/h_2) = 10 \text{ cm.} \qquad (2)$$

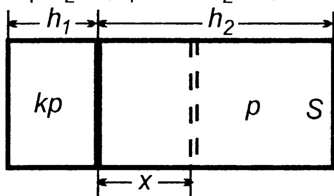


Fig.1.2.6

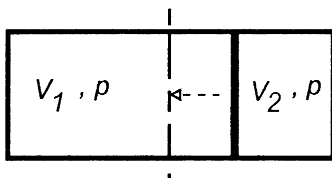


Fig.1.2.7

1.2.7. ***Un piston, care se poate mişca etanş fără frecări, împarte un cilindru orizontal în două compartimente cu raportul volumelor*** $V_1/V_2 = k = 3,0$, ***conţinând gaze la aceeaşi temperatură şi la aceeaşi presiune*** $p = 100$ kPa . ***Care va fi*** **diferența** ***de presiune dintre compartimente dacă deplasăm pistonul la mijloc ?***

Rezolvare. Gazul din fiecare compartiment suferă o transformare *izotermă* :

$$pV_1 = p_1' \cdot (V_1 + V_2)/2 , \quad pV_2 = p_2' \cdot (V_1 + V_2)/2 , \qquad (1)$$

de unde, prin împărţire membru la membru, respectiv prin adunare membru cu membru, obţinem :

$$V_1 / V_2 = k = p_1'/p_2' , \qquad p = (p_1' + p_2')/2 , \qquad (2)$$

de unde rezultă:

$$(V_1 - V_2) : (V_1 + V_2) = (k - 1) : (k + 1) = (p_1' - p_2') : (p_1' - p_2') \rightarrow$$

$$p_1' - p_2' = 2 p (k - 1) : (k + 1) = 100 \text{ kPa} . \qquad (3)$$

1.2.8. ***Un vas cilindric orizontal este împărţit în*** **n** ***compartimente cu ajutorul a*** n - 1 ***pistoane uşoare care se pot mişca etanş fără frecări. Iniţial pistoanele sunt blocate astfel încât volumele şi presiunile sunt respectiv*** V_i , p_i , i = 1, 2, 3, ..., n . ***Ce presiune se stabileşte în compartimente dacă pistoanele sunt deblocate*** (T = const) ***?*** .

Rezolvare. În starea finală de echilibru presiunea va fi peste tot aceeaşi p'. Gazul din fiecare compartiment suferă o transformare *izotermă* :

$p_i\ V_i = p'\ V_i'\ ,\ i = 1, 2, 3, ..., n\ .$ (1)

Sumăm aceste ecuații membru cu membru :

$\sum p_i\ V_i = \sum p'\ V_i' = p' \sum V_i'\ ,$ (2)

dar *suma* volumelor rămâne aceeaşi (volumul total al cilindrului):

$\sum V_i' = \sum V_i \ \rightarrow \sum p_i\ V_i = p' \sum V_k\ , \quad p' = (\sum p_i\ V_i) : (\sum V_k).$ (3)

1.2.9. ***O pompă cu volumul de lucru*** v = 20 cm^3 ***este conectată la un vas de volum*** V = 10 L . ***Întâi pompa efectuează*** N = 1000 curse *(sau rotații)* ***ca* compresor*, după care este conectată invers ca* pompă de vid *şi efectuează* acelaşi *număr de rotații. Care va fi presiunea finală din vas dacă presiunea atmosferică este normală ?***

Rezolvare. În cazul *compresorului* , la fiecare cursă, din aerul atmosferic se ia un volum v de aer la presiunea H şi se introduce în vas, deci la N curse se ia în total un volum Nv la presiunea atmosferică H şi se introduce *izoterm* în vas, unde va avea presiunea *parțială* $p' = H\ Nv / V$ care se adaugă la presiunea atmosferică existentă inițial în vas :

$p_o = H + H\ Nv / V = H\ (1 + Nv / V)\ .$ (1)

De la această presiune începe vidarea vasului. Pentru *prima* cursă de vidare, aerul din vas se destinde *izoterm* până la volumul $V + v$ căpătând presiunea

$p_1\ (V + v) = p_o\ V\ , \quad p_1 = p_o\ [V / (V + v)]\ .$ (2)

De la această presiune începe a *doua* cursă de vidare, analog primei curse:

$p_2\ (V + v) = p_1\ V\ ,\ p_2 = p_1\ [V / (V + v)] = p_o\ [V / (V + v)]^2$ (3)

şi aşa mai departe până la ultima cursă :

$p_N = p_{fin} = p_o\ [V / (V + v)]^N =$

$= H\ (1 + Nv / V)\ [V / (V + v)]^N = 41{,}22$ kPa . (4)

1.2.10. ***Un tub subțire închis la un capăt conține gaz care este închis printr-o coloană de mercur de lungime*** h = 10 cm . ***În poziție* orizontală *coloana de* gaz *are lungimea*** ℓ_o = 40 cm . ***În poziția* verticală *cu capătul deschis în sus coloana de gaz are lungimea*** ℓ_1 = 36 cm . ***Care este presiunea atmosferică ? Care va fi lungimea coloanei de gaz în poziția verticală cu capătul deschis în jos ?***

Rezolvare. Masa de gaz închisă în tub suferă transformări *izoterme* (la temperatura mediului ambiant). În poziția *orizontală*

presiunea gazului din interior este egală cu presiunea aerului din exterior (altfel coloana de mercur s-ar deplasa).

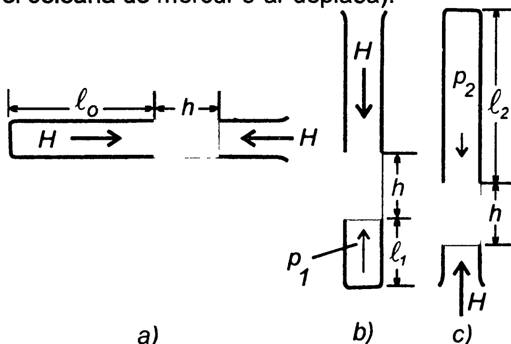


Fig.1.2.10

În prima poziție verticală presiunea gazului p_1 se compune din presiunea *hidrostatică* exercitată de coloana de mercur de deasupra (ρgh) la care se adaugă presiunea atmosferică : $p_1 = \rho gh + H$.

În a doua poziție verticală presiunea atmosferică H de la marginea inferioară a coloanei de mercur trebuie să echilibreze presiunea *hidrostatică* a coloanei de mercur de deasupra, ρgh, plus presiunea gazului din interior : $H = \rho gh + p_2$.

Scriem *legea* ***Boyle - Mariotte*** :

$$H \cdot \ell_o S = p_1 \cdot \ell_1 S = p_2 \ell_2 S \quad (1)$$

sau $H \ \ell_o = (H + \rho gh) \ \ell_1 = (H - \rho gh) \ \ell_2$. (2)

Din prima ecuație avem

$$H = \rho gh [\ell_1/(\ell_o - \ell_1)] = 119{,}7 \text{ kPa} , \quad (3)$$

iar din prima cu ultima : $\ell_2 = \ell_o \ [\ell_1 / (2\ell_1 - \ell_o)] = 45$ cm. (4)

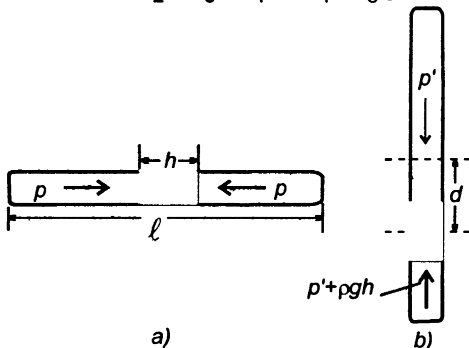


Fig.1.2.11

1.2.11. ***În mijlocul unui tub de lungime*** $\ell = 100$ cm ***se află o coloană de mercur de lungime*** h = 20 cm . ***Ridicând tubul din poziția orizontală în cea verticală coloana de mercur se deplasează cu*** d = 20 cm . ***Care a fost presiunea* inițială *a aerului din tub ?***

Rezolvare. În poziția *orizontală* presiunea de o parte şi de alta a coloanei de mercur este aceeaşi (la echilibru). În poziția *verticală* presiunea aerului din compartimentul inferior trebuie să echilibreze presiunea *hidrostatică* a coloanei de mercur de deasupra, ρgh , plus presiunea $p\,'$ exercitată de aerul din compartimetul superior : $\rho gh + p\,'$. Aerul din fiecare compartiment suferă o transformare *izotermă* (secțiunea *S* a tubului se simplifică) :

$p \cdot (\ell - h)/2 = p\,'[(\ell - h)/2 + d]$, $p \cdot (\ell - h)/2 = (p\,' + \rho gh)\,[(\ell - h)/2 - d]$. (1)

Scoatem presiunea $p\,'$ din prima ecuație şi o introducem în a doua; rezultă : $p = \rho gh\,[(\ell - h)^2 - 4d^2] : [4d\,(\ell - h)\,] = 20$ kPa . (2)

1.2.12. ***În mijlocul unui tub subțire orizontal, închis la capete, se află în echilibru o coloană de mercur de lungime*** h = = 19,6 cm . ***Dacă punem tubul sub un unghi*** $\alpha = 30^o$ ***față de orizontală, coloana de mercur se deplasează cu*** $d_1 = 20$ mm, ***iar dacă punem tubul vertical, ea se deplasează cu*** $d_2 = 30$ mm, ***ca în figură. Aflați presiunea aerului din tub în poziția orizontală.***

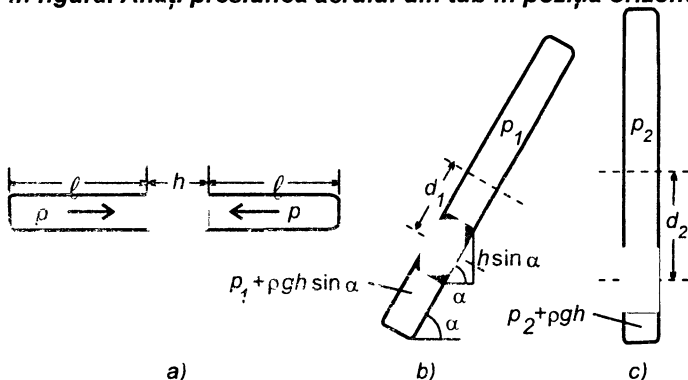


Fig.1.2.12

Rezolvare. Observăm că presiunea din compartimentul inferior este egală cu presiunea *hidrostatică* a coloanei de mercur de deasupra $\rho gh \sin\alpha$ (înălțimea coloanei măsurată pe *verticală*), respectiv ρgh, la care se adaugă presiunea aerului din compartimentul superior. Aerul din fiecare compartiment suferă o

succesiune de transformări *izoterme* (la temperatura mediului ambiant) (secțiunea S a tubului se simplifică) :

$$p\,\ell = p_1\,(\ell + d_1) = p_2\,(\ell + d_2)\ , \qquad (1)$$

$$p\,\ell = (p_1 + \rho gh \sin\alpha)(\ell - d_1) = (p_2 + \rho gh)(\ell - d_2)\ . \qquad (2)$$

Din (1) scoatem $p_{1,2}$ pe care le introducem în (2), obținem două ecuații din care eliminăm ℓ şi obținem

$$p = (1/2)\,(\rho gh \sin\alpha)\cdot(d_2^2 - d_1^2) :$$

$$= [\,d_1 d_2(d_1 - d_2 \sin\alpha)(d_2 - d_1 \sin\alpha)]^{1/2} = 13{,}3\ \text{kPa}\ . \qquad (3)$$

1.2.13. ***În mijlocul unui tub orizontal închis la ambele capete se află o coloană de mercur de lungime*** $h = 30$ cm , ***fiecare coloană de aer având lungimea*** $\ell = 0{,}50$ m . ***Presiunea atmosferică este*** $H = 100$ kPa . ***Punând tubul vertical, mercurul se deplasează cu*** $d = 10$ cm . ***Cu cât se deplasează mercurul față de mijlocul tubului dacă: a) se deschide un capăt al tubului în poziție* orizontală, b) *se deschide capătul superior în poziție verticală, c) se deschide capătul inferior în poziție verticală ?***

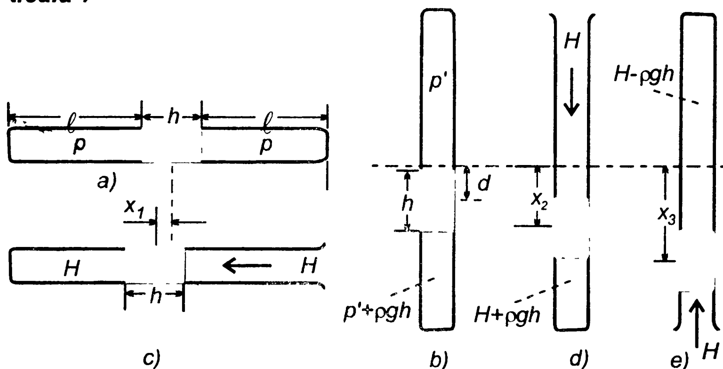


Fig.1.2.13

Rezolvare. Observăm că presiunea aerului din compartimentul inferior trebuie să echilibreze presiunea *hidrostatică* a coloanei de mercur ρgh plus presiunea aerului din compartimentul superior. Aerul din fiecare compartiment suferă transformări *izoterme* (la temperatura mediului ambiant)(secțiunea S a tubului se simplifică):

$$p\ell = p\,'(\ell + d)\ ,\quad p\,\ell = (p\,' + \rho gh)(\ell - d)\ , \qquad (1)$$

de unde rezultă prin eliminarea presiunii $p\,'$:

$$p = \rho gh\,(\ell^{\,2} - d^{\,2})\,/\,(2\ell d) = 96\ \text{kPa} < H = 100\ \text{kPa}\ .(2)$$

a) Dacă deschidem un capăt al tubului în poziție orizontală, mercurul se va retrage cu x_1 (deoarece $p < H$) :

$$p\ell = H(\ell - x_1) \rightarrow x_1 = \ell(H - p)/H = 20 \text{ mm} . \qquad (3)$$

b) Scriem direct ecuația transformării *izoterme* a aerului din compartimentul inferior din starea inițială în cea finală :

$$p\ell = (H + \rho gh)(\ell - x_2) \rightarrow$$

$$x_2 = \ell(H + \rho gh - p)/(H + \rho gh) = 15{,}7 \text{ cm} . \qquad (4)$$

c) Scriem direct ecuația transformării *izoterme* a aerului din compartimentul superior din starea inițială în cea finală:

$$p\ell = (H - \rho gh)(\ell + x_3) \rightarrow$$

$$x_3 = \ell(p - H + \rho gh)/(H - \rho gh) = 30 \text{ cm}. \qquad (5)$$

1.2.14. ***În camera barometrică a intrat puțin aer. Când barometrul arată presiunea*** $p_1 = 91$ kPa , ***lungimea coloanei de aer din camera barometrică este*** $\ell_1 = 30$ mm. ***Trăgând tubul în sus cu*** $h = 50$ mm ***barometrul arată acum*** $p_2 = 95$ kPa ***(gradațiile fiind pe o riglă fixă alăturată tubului). Aflați presiunea atmosferică .***

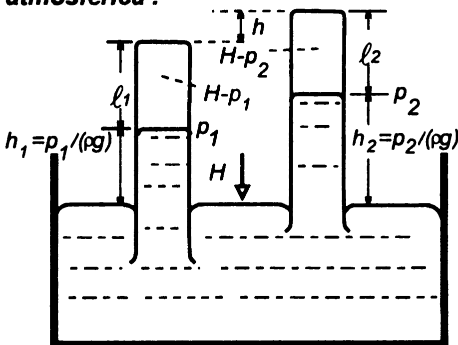


Fig.1.2.14

Rezolvare. Ceea ce citim pe scala barometrului reprezintă presiunea *hidrostatică* a coloanei respective de mercur, adică diferența dintre presiunea atmosferică și presiunea din camera barometrică, ceea ce coincide cu presiunea atmosferică, dacă în camera barometrică este *vid* ("*vidul lui Torricelli*"). Prin urmare, presiunea aerului din camera barometrică este $H - \rho gh_{1,2} = H - p_{1,2}$ și această masă de aer suferă o transformare *izotermă* (la temperatura mediului ambiant) atunci când tragem tubul în sus (secțiunea S se simplifică):

$$(H - p_1)\,\ell_1 = (H - p_2)\,\ell_2 . \qquad (1)$$

Pe de altă parte, înălțimile coloanelor de mercur se obțin din citirile respective, după cum am spus ,

$$h_{1,2} = p_{1,2} / (\rho g) . \qquad (2)$$

Atunci din geometria instalației rezultă :

$$h_1 + \ell_1 + h = h_2 + \ell_2 \text{ sau } p_1/(\rho g) + \ell_1 + h = p_2/(\rho g) + \ell_2 . \qquad (3)$$

Scoatem ℓ_2 din (3) şi îl introducem în (1) :

$$H = (p_2\ell_2 - p_1\ell_1) : (\ell_2 - \ell_1) =$$

$$= p_2 + \ell_1(p_2 - p_1) : [h - (p_2 - p_1) / (\rho g)] = 101 \text{ kPa} . \qquad (4)$$

1.2.15. ***Într-un tub barometric vertical coloana de mercur are lungimea*** h = 40 cm , ***iar coloana de aer*** ℓ = 19 cm, ***presiunea atmosferică fiind normală. Cu cât trebuie cufundat tubul în vasul cu mercur pentru ca nivelul mercurului din tub să se egaleze cu nivelul mercurului din vas ?***

Rezolvare. Masa de aer din camera barometrică suferă o transformare *izotermă* (la temperatura mediului ambiant). În primul caz presiunea atmosferică este echilibrată de presiunea hidrostatică a coloanei de mercur, ρgh , plus presiunea aerului din camera barometrică, deci presiunea acestuia este $H - \rho gh$. În al doilea caz presiunea aerului este chiar H, deoarece nu mai avem nici o denivelare. De asemenea, din geometria instalației rezultă lungimea coloanei de aer în al doilea caz.

$$(H - \rho gh)\,\ell = H(\ell + h - x) , \qquad (1)$$

de unde rezultă $\qquad x = h\,(H + \rho g \ell) / H = 50 \text{ cm} . \qquad (2)$

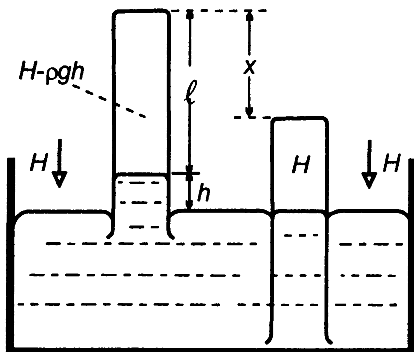


Fig.1.2.15

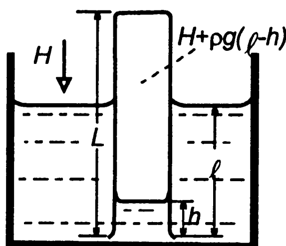


Fig.1.2.16

1.2.16. ***Un tub de lungime*** L = 1,00 m ***închis la capătul superior este cufundat, vertical, cu capătul inferior deschis, în apă pe o adâncime*** ℓ = 27 cm. ***Presiunea atmosferică este normală. Aflați lungimea coloanei de apă care pătrunde în tub.***

Rezolvare. În momentul atingerii suprafeței apei în tub se izolează o anumită masă de aer la presiunea atmosferică H şi având volumul tubului LS. Această masă de aer suferă o transformare *izotermă*. Presiunea finală a aerului din tub trebuie să echilibreze presiunea *hidrostatică* a coloanei (ℓ - h) de *apă* plus presiunea atmosferică : $(\ell - h)\rho g + H$. *Legea* ***Boyle-Mariotte*** dă (secțiunea S a tubului se simplifică) :

$$H L = [H + \rho g(\ell - h)]\,(L - h)\,, \qquad (1)$$

de unde soluția :

$$h = (1/2)\,[\ell + L + H/(\rho g)] \pm (1/2)\left\{[\ell + L + H/(\rho g)]^2 - 4\ell L\right\}^{1/2}. \qquad (2)$$

Să facem câteva evaluări :

$$\ell + L + H/(\rho g) = 0{,}27 + 1 + 10{,}33 = 11{,}6 \text{ m}\,,$$

$$[\ell + L + H/(\rho g)]^2 = 134{,}6 \text{ m}^2 \gg 4\ell L = 1{,}08 \text{ m}^2\,. \qquad (3)$$

În acest caz radicalul se poate aproxima conform formulei (v. anexa cu formule de aproximație):

$$\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a}\left(1+\frac{b}{2a}\right) = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}, \text{ dacă } |b| \ll a > 0. \qquad (4)$$

În cazul nostru :

$$\left\{[\ell + L + H/(\rho g)]^2 - 4\ell L\right\}^{1/2} \approx$$

$$\approx \ell + L + H/(\rho g) - 2\ell L : [\ell + L + H/(\rho g)]\,. \qquad (5)$$

Atunci (2) devine

$$h \approx (1/2)\,[l + L + H/(\rho g)] \pm$$

$$\pm (1/2)\left\{\ell + L + H/(\rho g) - 2\ell L : [\ell + L + H/(\rho g)]\right\} =$$

$$= \ell + L + H/(\rho g) - \ell L : [\ell + L + H/(\rho g)] = 11{,}6 \text{ m} - 0{,}023 \text{ m}\,,$$

respectiv $\ell L : [\ell + L + H/(\rho g)] = 0{,}023 \text{ m} = 23 \text{ mm}\,.$ (6)

Prima soluție evident nu convine fiind $h > L$.

1.2.17. ***Într-un vas cu mercur se cufundă un tub deschis la ambele capete, lăsând afară o lungime*** ℓ = 60 cm . ***Tubul se astupă cu degetul şi se cufundă cu încă*** h = 70 mm . **a)** ***Ce lungime va avea coloana de aer, presiunea atmosferică fiind normală ?*** **b)** ***Cu câte grade trebuie răcit acum tubul pentru ca nivelul mercurului să se egaleze, temperatura inițială fiind*** T = 300 K ***?***

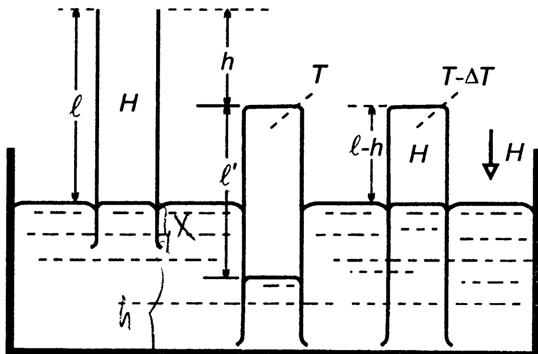


Fig.1.2.17

Rezolvare. a) În momentul astupării am izolat o masă de aer la presiunea atmosferică şi de volum ℓ S, care suferă o transformare *izotermă*. În starea finală presiunea aerului din tub trebuie să echilibreze presiunea *hidrostatică* a stratului de mercur $\rho g(h+\ell'-\ell)$ plus presiunea atmosferică H. *Legea* ***Boyle-Mariotte*** dă (secţiunea S a tubului se simplifică) :

$$H\ell = [H+\rho g(h+\ell'-\ell)]\,\ell', \quad (1)$$

$$\ell' = (1/2)\,[\ell - h - H/(\rho g)] \pm$$
$$\pm (1/2)\left\{[\ell - h - H/(\rho g)]^2 + 4H\ell/(\rho g)\right\}^{1/2} = 57\text{ cm} \quad (2)$$

(cealaltă soluţie este negativă).

b) În starea finală presiunea revine la presiunea atmosferică H (nu avem denivelări), deci putem considera *direct* transformarea *izobară* din starea iniţială în cea finală :

$$(T-\Delta T) : T = (\ell - h) : \ell, \qquad \Delta T = Th/\ell = 35\text{ K}. \quad (3)$$

1.2.18. ***Un tub cilindric închis la capătul superior este cufundat într-un vas cu mercur, astfel încât nivelul mercurului în tub şi în vas este acelaşi, iar aerul ocupă o porţiune de lungime*** $\ell = 73$ cm . ***Presiunea atmosferică este*** H = 100 kPa. ***Tubul este tras în sus cu*** d = 40 mm. **a)** ***La ce înălţime urcă mercurul în tub ?*** **b)** ***Cu câte grade trebuie încălzit tubul pentru ca nivelul mercurului să coboare la loc ? Temperatura iniţială*** T=300K.

Rezolvare. a) Presiunea atmosferică este echilibrată de presiunea *hidrostatică* ρgh a coloanei de mercur plus presiunea aerului din tub. În cazul problemei masa de aer închisă în tub are iniţial presiunea egală cu cea atmosferică (nu avem denivelări), suferă o transformare *izotermă* (la temperatura mediului ambiant) şi are în starea finală presiunea $H - \rho gh$ (secţiunea S a tubului se simplifică) :

$$H\ell = (H - \rho gh)(\ell + d - h), \quad (1)$$

$$h = (1/2)[\ell + d + H/(\rho g)] \pm$$

$$\pm (1/2)\{[\ell + d + H/(\rho g)]^2 - 4Hd/(\rho g)\}^{1/2} = 2{,}0 \text{ cm} \quad (2)$$

(cealaltă soluţie 100 cm , evident, nu convine problemei).

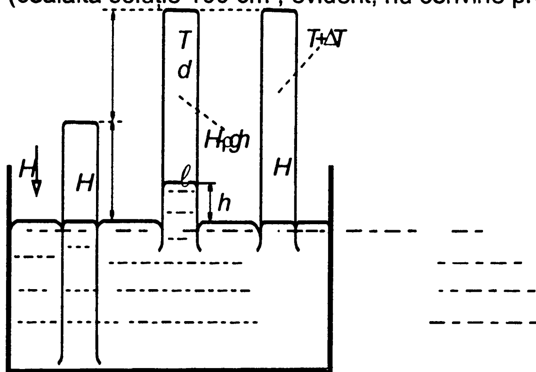


Fig.1.2.18

Ţinând seama că $d = 2$ cm $\ll H/(\rho g) = 75$ cm, să facem următoarele transformări :

$$[\ell + d + H/(\rho g)]^2 - 4Hd/(\rho g) = [\ell + H/(\rho g)]^2 - d\,[2H/(\rho g) -$$

$$- 2\ell - d] = (73 + 75)^2 - 2\,(2 \cdot 75 - 2 \cdot 73 - 2) = 148^2 - 2^2 \text{ cm}^2. \quad (3)$$

În acest caz putem aproxima radicalul cu formula cunoscută :

$$\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a}\left(1 + \frac{b}{2a}\right) = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}, \text{ dacă } |b| \ll a > 0. \quad (4)$$

În cazul nostru: $\{[\ell + H/(\rho g)]^2 - d\,[2H/(\rho g) - 2\ell - d]\}^{1/2} \approx$

$$\approx \ell + H/(\rho g) - d\,[H/(\rho g) - \ell - d/2] : [\ell + H/(\rho g)]$$

şi soluţia (2) devine :

$$h \approx d\,[H/(\rho g) - d/4] : [H/(\rho g) + \ell] \approx$$

$$\approx d\,[H/(\rho g)] : [H/(\rho g) + \ell] = 2{,}03 \text{ cm}. \quad (5)$$

b) Faţă de starea iniţială avem o transformare *izobară*, deci

$$(T + \Delta T) : T = (\ell + d) : \ell, \qquad \Delta T = T d/\ell = 16{,}4 \text{ K}. \quad (6)$$

1.2.19. ***Un tub cilindric subţire de lungime*** $\ell = 1{,}00$ m ***deschis la ambele capete, este cufundat pe jumătate într-un vas cu mercur la presiunea atmosferică*** H = 100 kPa . ***Tubul se închide la capătul superior şi se scoate vertical din lichid.* a) *Care este lungimea coloanei de mercur rămase în tub ?* b) *Se răstoarnă tubul cu*** 180°. ***Cu cât coboară coloana de mercur?* c) *Se toarnă apă până la refuz. Cu cât coboară coloana de mercur ?***

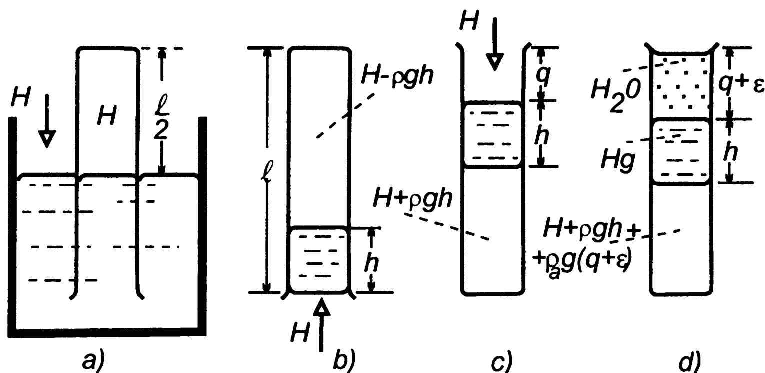


Fig.1.2.19

Rezolvare. După închiderea capătului superior avem o masă de aer care suferă un şir de transformări *izoterme* (la temperatura mediului ambiant).

a) $H\ell/2 = (H - \rho gh)(\ell - h)$, (1)

$h = (1/2)[\ell + H/(\rho g)] - (1/2)\{\ell^2 + H^2/(\rho g)^2\}^{1/2} = 25$ cm, (2)

unde $H/(\rho g) = 75$ cm.

b) Scriem transformarea *izotermă direct* din starea *a* în starea *c* :

$H\ell/2 = (H + \rho gh)(\ell - h - q) \rightarrow$

$q = \ell - h - [H/(\rho g)]\cdot(\ell/2) : [H/(\rho g) + h] = 37{,}5$ cm (3)

sau pentru transformarea *b - c* :

$(H - \rho gh)(\ell - h) = (H + \rho gh)(\ell - h - q) \rightarrow$

$q = 2h(\ell - h) : [h + H/(\rho g)] = 37{,}5$ cm . (4)

c) Transformarea *izotermă c - d* se scrie :

$(H + \rho gh)(\ell - h - q) = [H + \rho gh + \rho_a g(q + \varepsilon)](\ell - h - q - \varepsilon)$. (5)

Deoarece este de bănuit că ε este foarte ***mic*** faţă de q , putem neglija termenii pătratici în ε (de fapt în ε/q), fapt ce trebuie să se confirme prin rezultatul obţinut (pentru a fi "*autoconsistent*"). Atunci (5) se simplifică şi obţinem :

$\varepsilon \approx q(\ell - h - q) : [H/(\rho_a g) + h\,\rho/\rho_a + q - (\ell - h - q)] = 1{,}0$ cm (6)

(se justifică ipoteza $\varepsilon \ll q$) .

1.2.20. ***Într-un tub subţire vertical de lungime*** $\ell = 0{,}50$ m ***se află sus o coloană de mercur de lungime*** h = 15 cm ***care ajunge până la marginea superioară deschisă a tubului. Răsturnând uşor tubul cu deschiderea în jos, o parte din mercur***

se scurge. Presiunea atmosferică este H = 100 kPa . a) ***Care va fi lungimea coloanei de mercur rămase ? La ce lungime a tubului mercurul s-ar scurge complet ?*** b) ***Tubul este întors în poziția inițială. Cu cât coboară coloana de mercur ?*** c) ***Se toarnă apă până la refuz. Cu cât coboară coloana de mercur ? Cu câte grade trebuie încălzit tubul pentru ca toată apa să curgă afară ? Temperatura inițială*** t = 7,0°C .

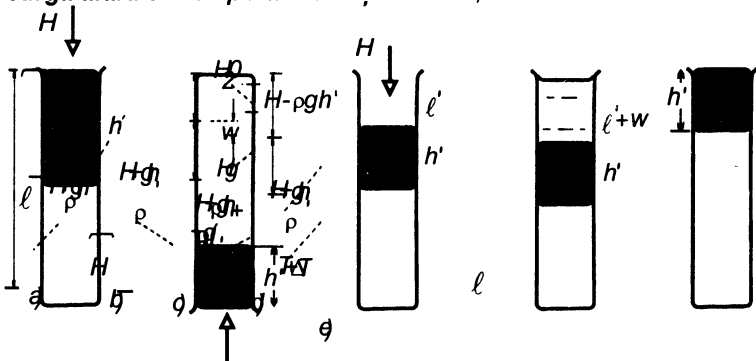


Fig.1.2.20

Rezolvare. Aerul închis în tub suferă o succesiune de transformări *izoterme* (la temperatura mediului ambiant), afară de ultima încălzire, care reprezintă o transformare *izobară* față de situația *c* .

a) Transformarea izotermă *a* - *b* :

$$(H + \rho g h)(\ell - h) = (H - \rho g h')(\ell - h') , \qquad (1)$$

$$h' = (1/2)[\ell + H/(\rho g)] - (1/2)\{[\ell + H/(\rho g)]^2 - 4h[h - \ell + H/(\rho g)]\}^{1/2} = 5{,}0 \text{ cm.} \qquad (2)$$

Condiția $h' \to 0$ implică

$$\ell = h + H/(\rho g) = 90 \text{ cm} . \qquad (3)$$

b) Transformarea izotermă *b* - *c* :

$$(H - \rho g h')(\ell - h') = (H + \rho g h')(\ell - h' - \ell '), \qquad (4)$$

$$\ell ' = 2h'(\ell - h') : [h' + H/(\rho g)] = 5{,}6 \text{ cm} \qquad (5)$$

(unde $H/(\rho g) = 75$ cm).

c) Transformarea izotermă *c* - *d* :

$$(H + \rho g h')(\ell - h' - \ell ') = [H + \rho g h' + \rho_a g(\ell ' + w)](\ell - h' - \ell ' - w). \qquad (6)$$

Deoarece este de aşteptat ca $w \ll \ell '$, neglijăm în (6) termenii pătratici în w şi atunci obținem :

$$w \approx \ell'(\ell - h' - \ell') : [H/(\rho_a g) + h'\rho/\rho_a + \ell' - (\ell - h' - \ell')] \approx$$

$$\approx \ell'(\ell - h' - \ell') : [H/(\rho_a g) + h'\rho/\rho_a + \ell'] = 2{,}0 \text{ cm}, \qquad (7)$$

unde $H/(\rho_a g) = 10{,}2$ cm , de aceea am neglijat termenul din paranteze de la numitor. Se verifică aproximativ $w \ll \ell'$.

De la c la e este o transformare izobară :

$$(T - \Delta T) : T = (\ell - h') : (\ell - h' - \ell'),$$

$$\Delta T = T\ell' : (\ell - h' - \ell') = 40 \text{ K}. \qquad (8)$$

1.2.21. ***O eprubetă de masă*** m = 50 g ***şi volum*** V = 150 cm^3 ***este cufundată cu gura în jos în apă până la adâncimea*** h = 10 cm. ***Ce forță trebuie aplicată pentru a menține eprubeta la această adâncime ? Presiunea atmosferică*** H = 100 kPa.

Cât la sută din volumul eprubetei se umple cu apă ?

Rezolvare. Să evaluăm masa aerului din eprubetă . Densitatea aerului în condiții obişnuite $\rho_{aer} = 1{,}29$ kg/m^3 , deci

$$m_{aer} = \rho_{aer} V \approx 0{,}2 \text{ g} \ll m = 50 \text{ g}, \qquad (1)$$

de aceea greutatea aerului din eprubetă poate fi neglijată (în raport cu greutatea eprubetei).

Aerul închis în eprubetă suferă o transformare *izotermă* :

$$H\ell = [H + \rho g(h + \ell')]\ell'. \qquad (2)$$

Pe de altă parte, condiția de echilibru mecanic :

$$F + mg = \rho V_{dezl.} g = \rho S\ell' g. \qquad (3)$$

Din ecuația (2) avem

$$\rho g\ell' = (1/2)(-H - \rho gh) \pm (1/2)\{(H + \rho gh)^2 + 4H\ell\}^{1/2}, \qquad (4)$$

astfel încât forța cerută, din (3) :

$$F = S\rho g\ell' - mg = (1/2) S\rho g\Big[-H/(\rho g) - h +$$

$$+ \{[H/(\rho g) + h]^2 + 4H\ell/(\rho g)\}^{1/2}\Big] - mg. \qquad (5)$$

Să facem unele evaluări şi aproximații :

$$H/(\rho g) = 10{,}20 \text{ m} \gg \ell\ (\approx 0{,}2 \text{ m}), \qquad (6)$$

atunci radicalul se poate aproxima conform formulei cunoscute :

$$\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a}\left(1 + \frac{b}{2a}\right) = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}, \text{ dacă } |b| \ll a > 0. \qquad (7)$$

În cazul nostru :

$$\{[H/(\rho g) + h]^2 + 4H\ell/(\rho g)\}^{1/2} \approx$$

$$\approx H/(\rho g) + h + 2\ell[H/(\rho g)] : [H/(\rho g) + h], \qquad (8)$$

atunci (5) devine

$F = VH : [H/(\rho g) + h] - mg \approx \rho g V - mg = 1{,}0$ N. (9)

din această expresie se vede că $\ell' \approx \ell$. În adevăr, aplicând aproximația (8) în (4) avem

$$\ell' \approx \ell H : (H + \rho g h) \approx \ell\,(1 - \rho g h / H),$$

$$(\ell - \ell') : \ell = h : [H/(\rho g)] < 1\ \%. \qquad (10)$$

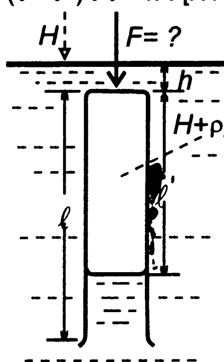


Fig.1.2.21

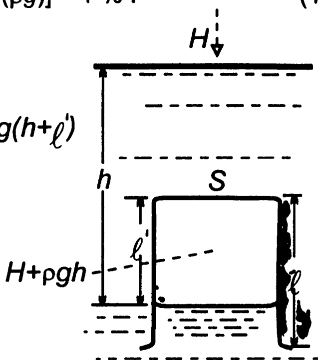


Fig.1.2.22

1.2.22. ***O căldare este cufundată în apă vertical cu gura în jos. Evaluați la ce adâncime ea se va scufunda singură.***

Rezolvare. Aerul închis în căldare suferă o transformare *izotermă* (la temperatura apei):

$$H\ell = (H + \rho g h)]\,\ell'. \qquad (1)$$

Pe de altă parte, condiția de plutire este

$$mg = \rho V_{dezl.} g = \rho S \ell' g. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă prin eliminarea lui ℓ':

$$h = [H/(\rho g)]\ [\rho S\ell - m] : m = [H/(\rho g)]\ [\rho V - m] : m. \qquad (3)$$

Pentru evaluare luăm: $H \approx 100$ kPa, atunci $H/(\rho g) \approx 10$ m ; $V = 10$ L , $m = 1$ kg. Rezultă $h \sim 90$ m .

1.2.23. ***Un pahar cilindric de masă*** m = 100 g ***şi secțiune*** S = 30 cm^2 ***este cufundat cu gura în jos în apă. Punând pe fundul paharului un corp de masă*** M = 200 g , ***fundul paharu-lui coboară până la nivelul apei din vas şi paharul plutește. Presiunea atmosferică*** H = 100 kPa. ***Cât la sută din volumul paharului se umple cu apă ? Care este înălțimea paharului ?***

Rezolvare. Aerul din pahar suferă o transformare *izotermă*. Inițial aerul era la presiunea atmosferică, iar final va avea presiunea atmosferică plus presiunea exercitată de pahar şi de corpul *M*,

prin greutatea lor : $H + (m + M)g / S$. Dacă fracțiunea din volumul paharului care se umple cu apă este f, atunci $f = (V - V') : V$.

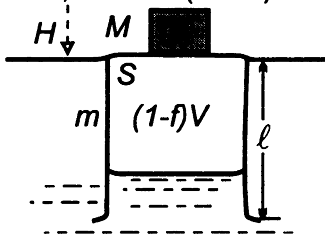


Fig.1.2.23

Legea ***Boyle-Mariotte*** se scrie astfel :

$HV = [H + (m + M)g / S] \cdot (1 - f)V$, (1)

de unde rezultă

$f = (m + M)g : [(m + M)\, g + HS] = 1{,}0\ \%$, (2)

adică intră foarte *puțină* apă în interior.

Pe de altă parte, condiția de plutire este

$(m + M)g = \rho V_{dezl.} g = \rho\,(1 - f)Vg$,

de unde

$V = S\,\ell = (m + M) : [(1 - f)\,\rho S \approx (m + M) : (\rho S) = 10$ cm . (4)

1.2.24. ***În sistemul din figură*** $S_1 = 20\ cm^2$, $\ell_1 = 15$ cm, $S_2 = 9{,}0\ cm^2$, $\ell_2 = 30$ cm , ***presiunea atmosferică*** H = 100 kPa . **a)** ***Cu cât va coborî nivelul mercurului din tub, dacă introducem pistonul până la refuz în cilindru ?*** **b)** ***Care trebuie să fie aria*** S_1 ***minimă pentru ca aerul să înceapă să iasă din tub ?***

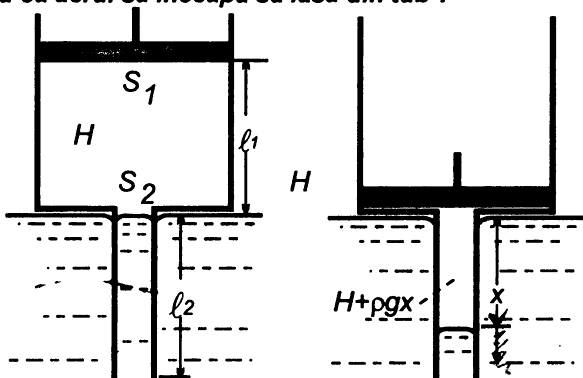


Fig.1.2.24

Rezolvare. a) Aerul închis sub piston suferă o transformare *izotermă*. Inițial are presiune atmosferică (nu avem denivelări), iar

final presiunea sa trebuie să echilibreze presiunea păturii ρgh plus presiunea atmosferică: $HS_1\ell_1 = (H + \rho gx)S_2x$, (1)

$x = [1/(2\rho g)]\{-H \pm [H^2 + 4H\rho g\ell_1 S_1/S_2]^{1/2}\} = 25$ cm . (2)

b) Punem condiția evidentă $x \to \ell_2$, atunci

$HS_1\ell_1 = (H + \rho g\ell_2)S_2\ell_2$, (3)

$S_1 = S_2(\ell_2/\ell_1)(H + \rho g\ell_2) : H = 25,2$ cm . (4)

1.2.25. ***Un tub în formă de*** U ***conține în ramura închisă o coloană de aer de lungime*** $\ell = 18$ cm ***la presiunea atmosferică*** H = 100 kPa. ***Cât devine coloana de aer dacă turnăm mercur până la refuz în ramura deschisă ? Ce masă de mercur s-a turnat dacă secțiunea tubului*** S = 1,00 cm^2 ***?***

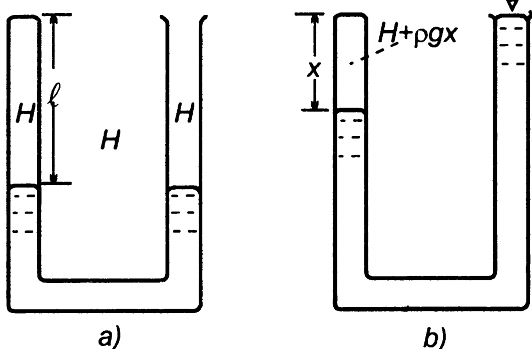


Fig.1.2.25

Rezolvare. Aerul închis în ramura închisă suferă o transformare *izotermă* :

$H\ell S = (H + \rho gx)xS$, (1)

$x = [1/(2\rho g)]\{-H \pm [H^2 + 4H\rho g\ell]^{1/2}\} = 15$ cm. (2)

Masa de mercur turnată :

$m = \rho S(\ell + \ell - x) = 286$ g . (3)

1.2.26. ***În dispozitivul din figură*** h = 10 cm. ***Deschizând robinetul, o parte din mercur curge și în ramura închisă nivelul mercurului coboară cu*** h ' = 9,0 cm . ***Cu cât coboară nivelul mercurului în ramura deschisă ? Presiunea atmosferică este normală.***

Rezolvare. Aerul închis în ramura închisă suferă o transformare *izotermă* (secțiunea *S* a tubului se simplifică) :

$$H h = [H - \rho g(h'' - h')] (h + h'),\quad (1)$$

în al doilea caz presiunea atmosferică echilibrează presiunea *hidrostatică* $\rho g(h'' - h')$ plus presiunea aerului închis. Din (1) rezultă:

$$h'' = h' + [H / (\rho g)] [h' : (h + h') = 45 \text{ cm}.\quad (2)$$

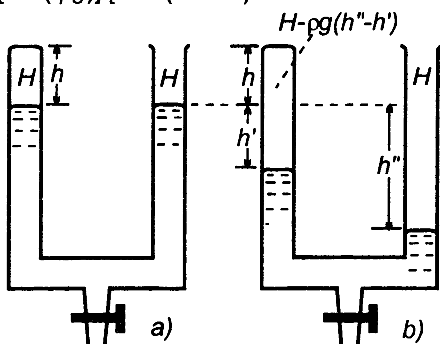


Fig.1.2.26

1.2.27. ***Un cilindru de masă*** M = 100 kg , ***închis cu un piston de masă*** m = 20 kg ***şi arie*** S = 0,200 m^2 , ***conţine aer, iniţial la presiunea atmosferică*** p_o = 100 kPa ***şi volum*** V_o = 0,200 m^3 . ***Cilindrul este cufundat în apă şi pistonul ancorat cu un lanţ în care tensiunea este*** F =300 N. ***Aflaţi adâncimea la care se află pistonul.***

Rezolvare. Aerul închis în cilindru suferă o transformare *izotermă* :

$$p_o V_o = p S h .\quad (1)$$

Condiţia de *echilibru mecanic* a pistonului :

$$(p_o + \rho g x) S = mg + F + pS .\quad (2)$$

Condiţia de *echilibru mecanic* a cilindrului :

$$p S = M g + [p_o + \rho g (x - h)] S .\quad (3)$$

Din aceste 3 ecuaţii trebuie să eliminăm pe *p* şi ***h***. Scoatem pe *pS* din (2) şi îl introducem în (1) şi (3) :

$$p_o V_o = h [(p_o + \rho g x)S - mg - F] ,\quad (4)$$

$$(p_o + \rho g x)S - mg - F = Mg + [p_o + \rho g (x - h)] S\quad (5)$$

sau $$- mg - F = Mg - \rho g h S\quad (6)$$

(ultima relaţie s-ar putea scrie şi direct).

Scoatem *h* din ultima relaţie şi îl introducem în (4) :

$$p_o V_o = [(Mg + mg + F) / (\rho g S)] [(p_o + \rho g x)S - mg - F],\quad (7)$$

de unde rezultă în sfârşit *x* :

$$x = p_o V_o : [(M + m)g + F] + [mg + F - p_o S] : (\rho g S) = 3{,}6 \text{ m}.\quad (8)$$

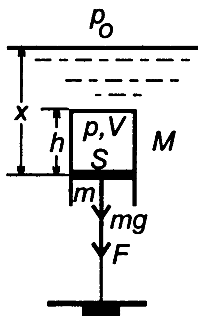


Fig.1.2.27

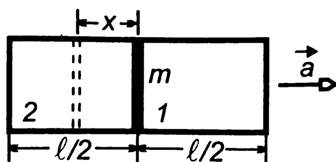


Fig.1.2.28

1.2.28. ***Un vas cilindric închis de volum*** V = 5,0 L ***şi lungime*** ℓ =1,00 m, ***aşezat orizontal, este împărţit în două compartimente egale cu ajutorul unui piston mobil, etanş, fără frecări, de masă*** m = 2,00 kg. ***Presiunea în fiecare compartiment este*** p = 100 kPa. ***Cu cât se va deplasa pistonul (la echilibru) dacă vasul este tras orizontal cu acceleraţia*** a = g ***?***

Rezolvare. În starea de echilibru relativ pistonul va avea acceleraţia $\vec{a}$, deci conform principiului *fundamental* al mecanicii (*lex secunda*) asupra lui trebuie să acţioneze o forţă rezultantă $m\vec{a}$. Această forţă se naşte din diferenţa de presiune dintre compartimente :

$$F = (p_2 - p_1)\, S = ma\,. \quad (1)$$

Dar aerul din fiecare compartiment suferă o transformare *izotermă*:

$$pV/2 = p_1(V/2 + Sx)\,, \quad pV/2 = p_2(V/2 - Sx). \quad (2)$$

Scoatem $p_{1,2}$ din (2) şi introducem în (1). Obţinem ecuaţia de gradul doi :

$$x^2 + x \cdot pV/(ma) - V^2/(4S^2) = 0\,, \quad (3)$$

$$x = -\,pV/(2ma) \pm \{[pV/(2ma)]^2 + \ell^2/4\}^{1/2} =$$

$$= [pV/(2ma)]\,[-1 \pm \{1 + [ma\ell/(pV)]^2\}^{1/2}\,.$$

Deoarece $ma\ell = 19{,}6$ J $\ll$ $pV = 500$ J, radicalul poate fi aproximat conform formulei cunoscute:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}\,, \text{ dacă } |x| \ll 1\,. \quad (5)$$

În cazul nostru :

$$x \approx [pV/(2ma)]\,(1/2)\,[ma\ell/(pV)^2 = ma\ell^2 : (4pV) = 1{,}0 \text{ cm}. \quad (6)$$

1.2.29. ***Într-un vas se află gaz închis cu un piston de masă*** m = 9,2 kg ***şi secţiune*** S = 98 cm^2 ***care se poate mişca etanş fără frecări. Mişcând vasul cu acceleraţia*** a = n g, n = 4,0 , ***în***

jos, volumul gazului a crescut de k = 1,5 *ori **la temperatura constantă (în mişcare staționară). Aflați presiunea atmosferică.***

Rezolvare. Gazul suferă o transformare *izotermă*. Inițial, pe lângă presiunea atmosferică *H*, mai acționează şi presiunea corespunzătoare greutății pistonului, *mg / S*. În starea finală *staționară* pistonul are accelerația *a* imprimată de forța rezultantă:

$$(H + mg / S - p')S = ma . \qquad (1)$$

Legea transformării *izoterme* se scrie :

$$(H + mg / S)\, V = p'\, V' = [H + m(g - a) / S] \cdot kV , \qquad (2)$$

de unde rezultă :

$$H = (mg / S)\,(nk - k + 1) : (k - 1) = 101{,}2 \text{ kPa} . \qquad (3)$$

1.2.30. ***Presiunea din cabina unei navete spațiale este măsurată cu manometrul din figură , care conține aer în ramura închisă, astfel încât în repaus, la presiunea*** p = 98,7 kPa ***din cabină denivelarea este*** h = 40 mm ***şi lungimea coloanei de aer*** ℓ = 20 cm. ***Care va fi denivelarea la pornirea verticală a navetei cu accelerația*** $a = g$ ***?***

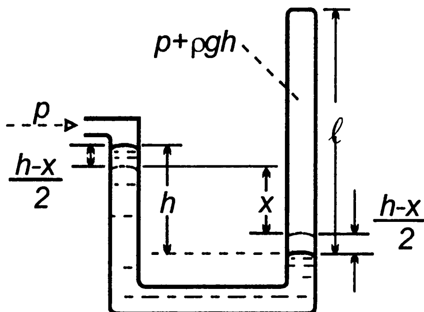


Fig.1.2.30

Rezolvare. Observăm că într-un sistem de referință *neinerțial*, în *translație neuniformă* față de stele şi nebuloase îndepărtate, totul se petrece ca şi cum sistemul de referință ar fi inerțial, dar apare un câmp gravitațional *echivalent* $\vec{g}_{ech} = -\vec{a}$ care se adaugă la câmpul gravitațional existent. În cazul nostru : $g' = g - (-a) = g + a$.
Observăm mai departe, că într-un tub cu aceeaşi secțiune peste tot, cu cât urcă lichidul într-o ramură, exact cu atât coboară în cealaltă ramură (lichid incompresibil).

Aerul din ramura închisă suferă o transformare *izotermă* :

$$(p + \rho gh)\, \ell\, S = [p + \rho(g + a)x]\, [\ell - (h - x) / 2)S . \qquad (1)$$

Aceasta este o ecuație de gradul doi în *x*, a cărei soluție acceptabilă pentru problema noastră este $x = 3{,}0$ cm.

1.2.31. ***Într-un vas cilindric de înălțime*** $2h = 1{,}00$ m ***se află inițial jumătate apă şi jumătate aer la presiunea atmosferică*** $H = 100$ kPa , ***separate printr-un perete în care este un mic orificiu. Ce grosime va avea stratul de apă în jumătatea inferioară atunci când aerul începe să iasă prin orificiu ?.***

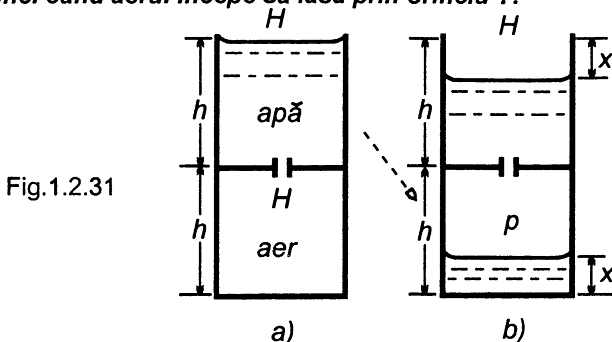


Fig.1.2.31

Rezolvare. Pentru ca aerul să înceapă să iasă prin orificiu trebuie ca presiunea sa să egaleze presiunea hidrostatică a păturii de apă $\rho g(h - x)$ plus presiunea atmosferică H :

$$p = H + \rho g(h - x) \,. \tag{1}$$

Pe de altă parte, până în acest moment aerul închis în jumătatea inferioară suferă o transformare *izotermă* (secțiunea S a vasului se simplifică):

$$Hh = p(h - x) = [H + \rho g(h - x)]\,(h - x)$$

sau
$$(h - x)^2 + (h - x)\,H/(\rho g) - hH/(\rho g) = 0 \,. \tag{2}$$

Din această ecuație de gradul doi rezultă :

$$x = h + [H/(2\rho g)]\,[1 - \{1 + 4\rho gh/H\}^{1/2}\,] = 2{,}24 \text{ cm} \,. \tag{3}$$

Deoarece $H/(\rho g)] = 10{,}2$ m şi $h = 0{,}50$ m , putem aproxima radicalul cu ajutorul formulei cunoscute

$$(1+x)^r \approx 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}\,x^2 + \ldots \,,\ \text{dacă } |x| \ll 1 \,. \tag{4}$$

În cazul nostru $x = 4\rho gh/H$ şi $r = 1/2$:

$$\{1 + 4\rho gh/H\}^{1/2} \approx 1 + 2\rho gh/H - 2(\rho gh/H)^2 + \ldots \tag{5}$$

Dacă păstrăm *prima* aproximație, de ordinul I, efectul "dispare" : $x \to 0$, deaceea păstrăm şi aproximația următoare, de ordinul II, atunci :

$$x \approx h \cdot \rho gh/H = h \cdot h : [H/(\rho g)\,] = 2{,}45 \text{ cm} \,. \tag{6}$$

1.2.32. ***În dispozitivul din figură :*** $\ell = 24$ cm , $h = 20$ cm . ***Inițial mercurul umple ramura orizontală, iar în ramura închisă este aer şi presiunea atmosferică este*** **normală.** ***Cu ce turație trebuie învârtit dispozitivul pentru ca mercurul să urce cu*** $h' =$ $= 16$ cm ***?***

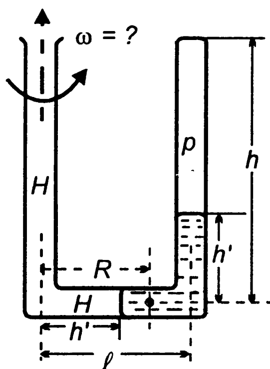


Fig.1.2.32

Rezolvare. Aerul din ramura închisă suferă o transformare *izotermă*. Inițial are presiunea egală cu cea atmosferică şi volumul Sh :

$$H h = p(h - h') . \qquad (1)$$

Pe de altă parte porțiunea de mercur rămasă în ramura orizontală $(\ell - h')$ are o mişcare *circulară* sub acțiunea forței *centripete* dată de diferența de presiune :

$$F = (p + \rho g h') - H = m a_{CM} = m\,\omega^2 R , \qquad (2)$$

unde $\quad m = \rho\,(\ell - h')\,S , \quad R = (h' + \ell)/2 . \qquad (3)$

Scoatem p din (1) şi îl introducem în (2), ținând seama de (3) :

$$Hh/(h - h') + \rho g h' - H = \rho(\ell - h')\,S\,\omega^2(\ell + h')/2 , \qquad (4)$$

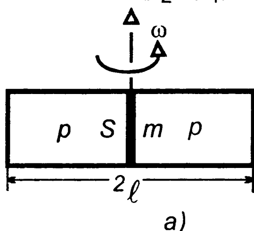
de unde rezultă

$$n^2 = \omega^2/(4\,\pi^2) = [1/(4\,\pi^2)]\,2\,gh'[h - h' + H/(\rho g)] :$$
$$: [(h - h')(\ell^2 - h'^2)] = 49 \text{ rot}^2/\text{s}^2 , \quad n = 7{,}0 \text{ rot/s} . \qquad (5)$$

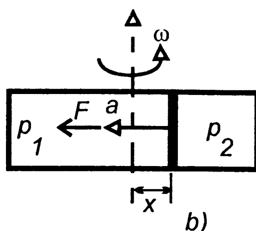
1.2.33. ***La mijlocul unui tub de lungime*** $2\ell = 1{,}00$ m , ***închis la capete, se află un piston subțire de masă*** $m = 0{,}40$ kg ***şi arie*** $S = 10$ cm^2 , ***care se poate deplasa etanş fără frecări. În stânga şi dreapta pistonului se află gaz la presiunea*** $p = 100$ kPa. ***Tubul este adus în rotație într-un plan orizontal în jurul unei axe verticale care trece prin mijlocul tubului. Temperatura este menținută constantă. Aflați viteza unghiulară dacă pistonul s-a deplasat cu distanța*** $x = 30$ mm.

Rezolvare. Poziția *centrală* a pistonului este *instabilă*. La cea mai mică trepidație el se va deplasa în poziția de echilibru (relativ) stabil, ca în figură, efectuând deci o mişcare circulară uniformă sub acțiunea unei forțe *centripete* dată de diferența presiunilor:

$$F = (p_2 - p_1)\,S = ma = m\,\omega^2 x\,. \qquad (1)$$



a)



b)

Fig.1.2.33

Pe de altă parte, aerul din fiecare compartiment suferă o transformare *izotermă* :

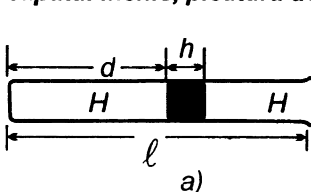
$$p\,\ell = p_2(\ell - x), \qquad p\,\ell = p_1(\ell + x)\,. \qquad (2)$$

Din (2) scoatem $p_{1,2}$ şi le introducem în (1) :

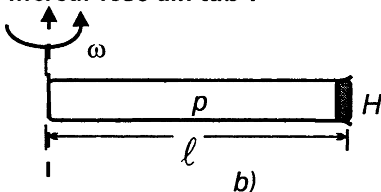
$$p\,\ell\,[1/(\ell - x) - 1/(\ell + x]\,S = m\,\omega^2 x\,,$$

$$\omega^2 = 2p\ell S : [m(\ell^2 - x^2)] = 625\ \text{rad}^2/\text{s}^2\,,\ \omega = 25\ \text{rad/s}. \ (3)$$

1.2.34. ***Într-un tub orizontal de lungime*** ℓ = 80 cm , ***închis la un capăt, se află în echilibru o picătură de mercur de lungime*** h = 3,0 mm, ***la distanța*** d = 64 cm ***de capătul închis. Presiunea atmosferică*** H = 100 kPa, ***densitatea mercurului*** ρ = 13,6 g/cm³ . ***La ce viteză unghiulară în jurul unei axe verticale trecând prin capătul închis, picătura de mercur iese din tub ?***



a)



b)

Fig.1.2.34

Rezolvare. Aerul din tub suferă o transformare *izotermă*, având inițial presiunea *H* :

$$H\,d = p\,\ell\,, \quad (h = 3\text{ mm} \ll \ell = 800\text{ mm}). \qquad (1)$$

Pe de altă parte, picătura de mercur are o mişcare *circulară* sub acțiunea forței *centripete* , dată de *diferența* de presiune:

$$F = (H - p)\,S = ma = \rho h S \cdot \omega^2 \ell\,. \qquad (2)$$

Eliminăm p din (1), (2) şi obţinem

$$\omega^2 = H(1 - d/\ell) : (\rho h\ell) = 625\ \text{rad}^2/\text{s}^2, \quad \omega = 25\ \text{rad/s}. \qquad (3)$$

1.2.35. ***În sistemul din figură se dau*** $p_o = 100$ kPa, $S_1 = 100$ cm^2, $S_2 = 400$ cm^2, $V = 6{,}0$ L - ***volumul iniţial total al gazului. Cu cât se deplasează pistoanele (cuplate*** **rigid** ***între ele), dacă presiunea exterioară creşte până la*** $p = 200$ kPa ***?***

Rezolvare. Să scriem condiţia de *echilibru mecanic* a sistemului format de cele două pistoane cuplate rigid :

$$pS_1 + p^*S_2 = pS_2 + p^*S_1 \longrightarrow (p - p^*)S_1 = (p - p^*)S_2, \qquad (1)$$

deoarece $S_1 \neq S_2$, rezultă de aici $p = p^*$, adică presiunea aerului din cilindri trebuie să fie permanent egală cu presiunea exterioară !

Aerul din cilindri suferă o transformare *izotermă* :

$$p_oV = p(V + xS_1 - xS_2), \qquad (2)$$

$$x = [V : (S_2 - S_1)]\,[(p - p_o) : p] = 10\ \text{cm}. \qquad (3)$$

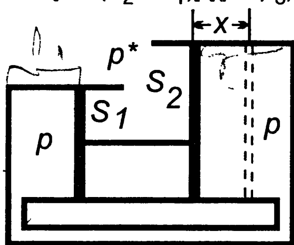


Fig.1.2.35

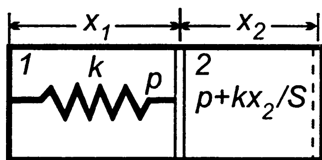


Fig.1.2.36

1.2.36. ***Într-un cilindru orizontal vidat stă în echilibru lângă un capac un piston (care se poate mişca etanş fără frecări) prins printr-un resort orizontal de celălalt capac. Se introduc mase egale din acelaşi gaz de o parte şi de alta a pistonului. Aflaţi raportul volumelor de gaz, ştiind că prin vidarea compartimentului cu resort, volumul celălalt creşte de*** $n = 2{,}0$ ori.

Rezolvare. Fiind mase egale din acelaşi gaz, la aceeaşi temperatură, putem scrie *legea **Boyle-Mariotte*** pentru stările *1 - 2* $(pV = (m/\mu)RT)$:

$$px_1S = (p + kx_2/S)x_2S, \qquad (1)$$

unde am ţinut seama de presiunea suplimentară exercitată de resort kx_2/S. Pe de altă parte, prin vidarea compartimentului cu resort, gazul din celălalt compartiment suferă în continuare o transformare *izotermă* :

$$(p + kx_2 / S)x_2S = (k\,nx_2 / S)\,nx_2S\,. \qquad (2)$$

Din ultima relație scoatem presiunea p pe care o introducem în (1):

$$p = (kx_2 / S)\,(n^2 - 1)\,, \qquad (n^2 - 1)x_1 = n^2\,x_2\,,$$

$$V_1 / V_2 = x_1 / x_2 = n^2 / (n^2 - 1) = 4 / 3\,. \qquad (3)$$

*

1.3. Transformarea generală

1.3.1. ***Un vas cilindric este împărțit cu ajutorul unui piston termoizolant , care se poate mişca etanş fără frecări, în două compartimente de lungime*** ℓ_1 = 20 cm , ℓ_2 = 40 cm , ***conținând gaze la presiunile*** p_1 = 300 kPa , p_2 = 100 kPa ***şi la aceeaşi temperatură, ca în figură. Cu cât se va deplasa pistonul dacă îl lăsăm liber şi încălzim gazele până la temperatura*** T_1 = 400 K, ***respectiv*** T_2 = 300 K ?

Rezolvare. Gazul din fiecare compartiment suferă o transformare *generală* (masa *m* = const). În starea finală de *echilibru* de o parte şi de alta a pistonului trebuie să fie aceeaşi presiune *p* ' :

$$p_1\ell_1 S / T = p'(\ell_1 + x)S / T_1 , \quad p_2\ell_2 S / T = p'(\ell_2 - x)S / T_2 . \quad (1)$$

Împărțind membru la membru ecuațiile, găsim

$$x = \ell_1 \ell_2 (p_1T_1 - p_2T_2) : (p_1 \ell_1 T_1 + p_2 \ell_2 T_2) = 20 \text{ cm}. \quad (2)$$

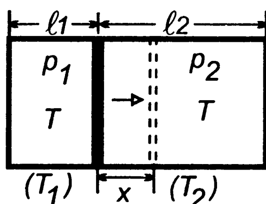


Fig.1.3.1

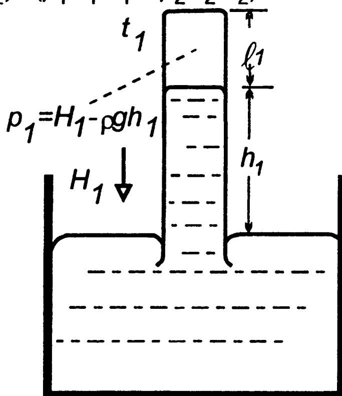


Fig.1.3.2

1.3.2. ***Camera unui barometru conține puțin aer. Într-o zi, când temperatura este*** t_1 = 17°C ***şi presiunea atmosferică*** **nor-malǎ,** ***coloana de mercur are înălțimea*** h_1 = 710 mm ***şi lungimea coloanei de aer*** ℓ_1 = 29 cm. ***În altă zi coloana de mercur***

este $h_2 = 700$ mm , ***temperatura fiind*** $t_2 = 27^oC$. ***Care este presiunea atmosferică în ultimul caz ?***

Rezolvare. Aerul din camera barometrică suferă o transformare *generală*. Presiunea atmosferică H este echilibrată de presiunea *hidrostatică* a coloanei de mercur ρgh la care se adaugă presiunea aerului din camera barometrică : $H = \rho gh + p$. Legea transformării *generale* dă :

$$(H_1 - \rho gh_1)\ell_1 S / T_1 = (H_2 - \rho gh_2)\ell_2 S / T_2 , \qquad (1)$$

dar $h_1 + \ell_1 = h_2 + \ell_2$, atunci rezultă :

$$H_2 = \rho gh_2 + (H_1 - \rho gh_1)(T_2 / T_1)[\ell_1 / (\ell_1 + h_1 - h_2)] = 100 \text{ kPa} . \qquad (2)$$

1.3.3. ***O eprubetă de lungime*** $L = 28$ cm ***este cufundată cu gura în jos în mercur, astfel încât lungimea eprubetei rămase afară este*** $\ell = 25$ cm. ***La temperatura*** $t = 27^oC$ ***în eprubetă a pătruns o coloană de mercur de lungime*** $h = 5{,}0$ cm . ***Până la ce temperatură trebuie încălzită eprubeta pentru ca aerul să înceapă să iasă din ea? Presiunea atmosferică este*** $H = 100$ kPa.

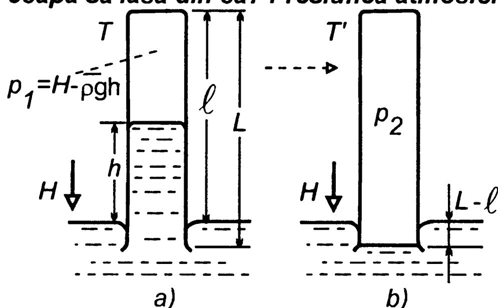


Fig.1.3.3

Rezolvare. Aerul din eprubetă suferă o transformare *generală*. Inițial presiunea atmosferică este echilibrată de presiunea hidrostatică a coloanei de mercur , ρgh , plus presiunea gazului din eprubetă : $H = \rho gh + p_1$.În starea finală presiunea p_2 din eprubetă echilibrează presiunea hidrostatică a păturii de mercur $\rho g(L - \ell)$ plus presiunea atmosferică : $p_2 = \rho g(L - \ell) + H$. Prin urmare,

$$(H - \rho gh)(\ell - h)S / T = [H + \rho g(L - \ell)] LS / T' , \qquad (1)$$

$$T' = T[L / (\ell - h)][H / (\rho g) + L - \ell] : [H / (\rho g) - h] =$$
$$= 468 \text{ K} = 195^oC , \text{ unde } H / (\rho g) = 750 \text{ mm} . \qquad (2)$$

1.3.4. ***O eprubetă de lungime*** $\ell = 20$ cm ***este cufundată cu gura în jos în apă, astfel încât nivelul apei este acelaşi în vas şi***

eprubetă, şi în apă se află a n = 10 - ***a parte din lungimea eprubetei. Cu câte grade trebuie încălzită eprubeta pentru ca să iasă aer din ea, temperatura inițială fiind*** t = 27°C ***şi presiunea atmosferică*** **normală ?**

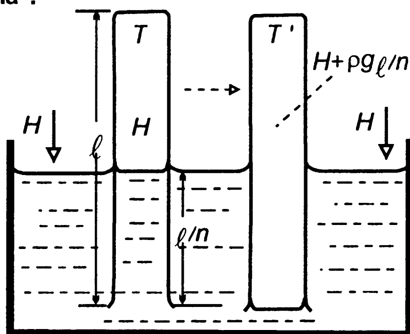


Fig.1.3.4

Rezolvare. Aerul din eprubetă suferă o transformare *generală*:

$$H(\ell - \ell / n)S / T = (H + \rho g\ell / n)\, \ell\, S / (T + \Delta T)\,, \qquad (1)$$

$$\Delta T = T\,(H + \rho g\ell) : [H(n - 1)] = T\,[H / (\rho g) + \ell] :$$

$$: [(n - 1)\, H / (\rho g)\,] = 34 \text{ K}, \quad \text{unde} \quad H / (\rho g) = 10{,}332 \text{ m}\,. \qquad (2)$$

1.3.5. ***Un tub cilindric de lungime*** ℓ = 30 cm, ***închis la un capăt, este cufundat complet, cu capătul deschis în apă. Temperatura aerului*** t = 27°C ***este cu*** ΔT = 10 K ***mai mare decât temperatura apei. Ce lungime va avea coloana de apă care a intrat în tub după ce aerul din eprubetă ia temperatura apei ?***

Rezolvare. Aerul din eprubetă suferă o transformare *generală*. Inițial presiunea este egală cu cea atmosferică, iar final presiunea din tub trebuie să echilibreze presiunea stratului de apă $\rho g(\ell - h)$ plus presiunea atmosferică :

$$H\,\ell / T = [H + \rho g(\ell - h)]\,(\ell - h) / (T - \Delta T)\,, \qquad (1)$$

$$h = H / (2\,\rho g) + \ell \pm [H / (2\,\rho g)]\,\{1 + 4\{\ell : [H / (\,\rho g)]\}(T - \Delta T) / T\}^{1/2}.(2)$$

Deoarece $H / (\,\rho g) \approx 10$ m » $\ell = 0{,}3$ m , putem aproxima radicalul conform formulei cunoscute :

$$(1 + x)^{1/2} \approx 1 + x / 2\,, \quad \text{dacă } |\,x\,| \ll 1\,. \qquad (3)$$

În cazul nostru :

$$h \approx H / (2\,\rho g) + \ell \pm [H / (2\,\rho g)]\,\{1 + 2\{\ell : [H / (\,\rho g)]\}(T - \Delta T) / T\} =$$

$$= \ell\, \Delta T / T = 1{,}0 \text{ cm}\,, \qquad (4)$$

cealaltă soluție nefiind acceptabilă pentru problemă (h » 2ℓ).

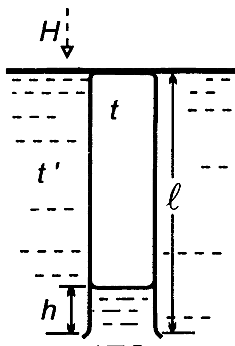


Fig.1.3.5

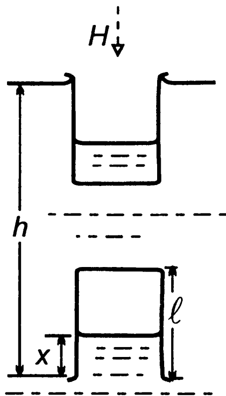


Fig.1.3.6

1.3.6. ***Un pahar cilindric de lungime*** ℓ = 10 cm ***pluteşte în apă cu marginile (gura) chiar la nivelul apei, dacă este umplut cu*** f = 3/4 ***cu apă . Acelaşi pahar conţinând aer încălzit la temperatura*** t_1 = 127°C ***este cufundat cu gura în jos în apă care are temperatura*** t_2 = 27°C . ***Presiunea atmosferică este*** H = 100 kPa. ***La ce adâncime paharul va fi până la urmă în* suspensie *?***

Rezolvare. În cele două cazuri avem *condiţia de plutire* (*m* - masa paharului):

$mg = \rho S\,\ell(1 - f)\,g\,,\quad mg = \rho S(\ell - x)\,g \rightarrow x = f\,\ell$, (2)

ceea ce era de aşteptat.

În al doilea caz aerul suferă o transformare *generală* :

$H\,\ell\,/\,T_1 = [H + \rho g(h - x)]\,(\ell - x)\,/\,T_2 = [H + \rho g(h - f\,\ell)]\,\ell\,(1 - f)/\,T_2$,(3)

$h = f\,\ell + [H/(\rho g)]\,\{\,T_2 : [T_1(1 - f)] - 1\,\} = 20{,}7$ cm , (4)

unde $H/(\rho g)$= 10, 20 m .

1.3.7. ***O eprubetă conţinând gaz este cufundată cu capătul deschis într-un lichid de densitate*** ρ= 1033 kg/m^3, ***astfel încât la temperatura*** t = 30°C ***şi presiunea atmosferică* normală, *denivelarea lichidului este zero şi lungimea coloanei de gaz*** ℓ = = 30 cm. **a)** ***Până la ce temperatură trebuie răcită eprubeta cu gaz pentru ca volumul de gaz să scadă la*** f = 90 % ***din valoarea iniţială ?*** **b)** ***Dacă cufundăm complet eprubeta, cu cât se reduce lungimea coloanei de aer la cele două temperaturi ?***

Rezolvare. a) În acest caz aerul suferă o transformare *generală* :

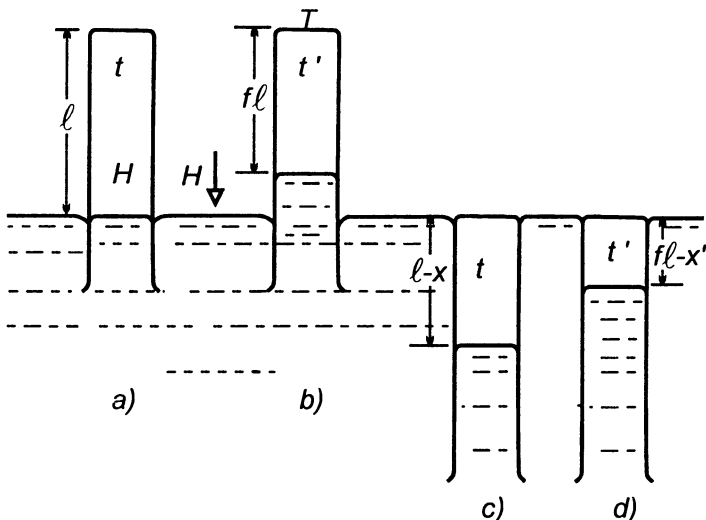


Fig.1.3.7

$$H\ell / T = [H - \rho g(\ell - f\ell)]\, f\ell / T' \,, \qquad (1)$$

$$T' = fT\,[H - \rho g(1 - f)\ell] / H \approx fT = 273\ \text{K} = 0^{o}\text{C} \,. \qquad (2)$$

b) De la *a* la *c* gazul suferă o transformare *izotermă* :

$$H\ell = [H + \rho g(\ell - x)]\,(\ell - x) \,. \qquad (3)$$

Deoarece $x \ll \ell$, putem neglija termenii *pătratici* în x $(x/\ell \ll 1)$ şi obţinem : $x \approx \ell : [2 + H/(\rho g\ell)] \approx \ell\, \rho g\ell / H = 9{,}0$ mm . (4)

c) De la *b* la *d* avem iarăşi o transformare *izotermă* :

$$[H - \rho g(1 - f)\ell]\, f\ell = [H + \rho g(f\ell - x')]\,(f\ell - x') \,. \qquad (5)$$

Deoarece $x' \ll f\ell$, putem neglija termenii pătratici în x' şi obţinem $x' \approx f\ell : [2f + H/(\rho g\ell)] \approx f\ell \cdot \rho g\ell / H = 8{,}0$ mm . (6)

1.3.8. ***Un tub îndoit în formă de*** U ***are la capătul închis o masă de aer. La temperatura*** $t_1 = 17^oC$ ***şi presiunea atmosferică*** $H_1 = 102{,}66$ kPa ***aerul ocupă lungimea*** $\ell_1 = 29$ cm ***şi denivelarea mercurului este*** $h_1 = 10$ mm, ***ca în figură. Într-o altă zi denivelarea a devenit*** $h_2 = 30$ mm ***la temperatura*** $t_2 = 27^oC$. **a)** ***Care este presiunea atmosferică*** H ***?*** **b)** ***Care va fi denivelarea în condiţiile*** **normale** ***de temperatură şi presiune ?*** **c)** ***Pentru ce temperatură (la presiunea atmosferică*** **normală*****) denivelarea se anulează ?***

Rezolvare. Aerul închis suferă o transformare *generală*. Presiunea aerului închis echilibrează presiunea *hidrostatică* a coloanei de mercur $\rho g h$ plus presiunea atmosferică : $p = \rho g h + H$. De asemenea, observăm că, - secțiunea tubului fiind *aceeaşi*, - cu cât mercurul coboară într-o ramură cu atât urcă în cealaltă.

a) $(H_1 + \rho g h_1)\,\ell_1 / T_1 = (H_2 + \rho g h_2)\,[\ell_1 + (h_2 - h_1)/2] / T_2$,(1)

$H_2 = (H_1 + \rho g h_1)(T_2/T_1)\,\ell_1 : [\ell_1 + (h_2 - h_1)/2] - \rho g h_2 = 100{,}0$ kPa.(2)

b) Punem în (1) condiția $H_2 = p_2 = 101{,}32$ kPa şi $T_2 = T_0 =$ $= 273$ K. Rezultă o ecuație de gradul doi în h_2 :

$h_2' = (1/2)[-p_0/(\rho g) - 2\ell_1 + h_1] \pm$

$\pm (1/2)\{[p_0/(\rho g) - 2\ell_1 + h_1]^2 + 8[H_1/(\rho g) + h_1]\,\ell_1 T_0/T_1\}^{1/2} =$

$= (1/2)(-133{,}0 \pm 131{,}9)$ cm $= -5{,}5$ mm , (3)

unde $p_0/(\rho g) = 76{,}0$ cm , $H_1/(\rho g) = 77{,}0$ cm (denivelarea mercurului se inversează).

c) Punem acum în (1) condiția $H_2 = p_0 = 101{,}32$ kPa şi $h_2 = 0$:

$T_2' = T_1\,\{[p_0/(\rho g)] : [H_1/(\rho g) + h_1]\}\,(\ell_1 - h_1/2) : \ell_1 =$

$= 286{,}8$ K $= 13{,}6^oC$. (4)

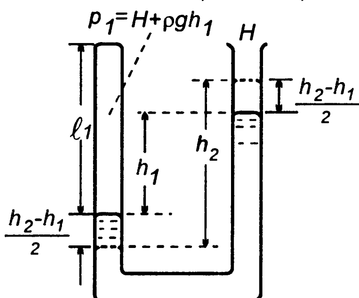


Fig.1.3.8

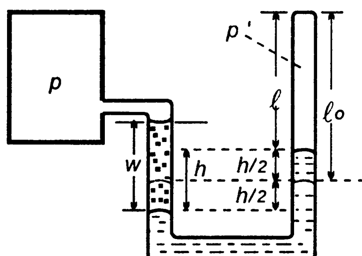


Fig.1.3.9

1.3.9. ***În condiții* normale *coloana de aer de la capătul închis al unui manometru cu mercur în formă de*** U ***are lungimea*** $\ell_0 = 27{,}3$ cm ***şi denivelarea zero. Legat la o etuvă manometrul arată o denivelare a mercurului*** h = 46 mm, ***temperatura fiind*** t = 27°C, ***iar în ramura legată la etuvă s-a condensat o coloană de apă de lungime*** w = 68 mm, ***ca în figură . Aflați presiunea din etuvă .***

Rezolvare. Aerul din ramura închisă suferă o transformare *generală*. Inițial, - denivelarea fiind zero, - presiunea va fi egală cu

cea atmosferică. În starea finală, luând o suprafața orizontală trecând prin nivelul inferior al mercurului avem egalitatea presiunilor (*principiul vaselor comunicante*) :

$$p' + \rho gh = p + \rho_a gw \rightarrow p' = p + \rho_a gw - \rho gh . \quad (1)$$

Pe de altă parte, tubul având aceeaşi secțiune peste tot, avem evident din figură $\ell = \ell_o - h/2$.

$$p_o \ell_o / T_o = (p + \rho_a gw - \rho gh)(\ell_o - h/2)/T , \quad (2)$$

$$p = -\rho_a gw + \rho gh + p_o (T/T_o)\, \ell_o /(\ell_o - h/2) = 127 \text{ kPa} . \quad (3)$$

1.3.10. ***Într-o eprubetă de lungime*** 2h ***se află o coloană de aer de lungime*** h = 760 mm ***peste care stă o coloană de mercur de înălțime*** h = 760 mm. ***Presiunea atmosferică este normală, iar temperatura*** t = 7,0°C. ***Până la ce temperatură trebuie încălzit (cvasistatic) aerul din eprubetă pentru ca tot mercurul să curgă afară ? Reprezentați grafic procesul în diagramele*** p - V, V - T ***şi*** p - T .

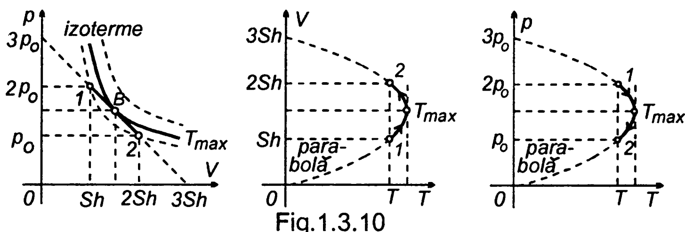


Fig.1.3.10

Rezolvare. În condiții normale de gravitație (g_n = 9,80665 m/s^2) şi temperatură (0°C) presiunea atmosferică normală p_o = =101325 Pa este echilibrată de o coloană de mercur înaltă de h = =760 mm [ρ_{Hg} (0°C) = 13595,1 kg/m^3]. Şi reciproc, o coloană de mercur h = 760 mm exercită o presiune hidrostatică *egală* cu p_o = =101325 Pa *numai dacă* mercurul este la 0°C şi gravitația este cea normală (g_n).

În cazul problemei, neglijând corecțiile de temperatură şi gravitație, putem considera că $\rho gh = p_o$ şi că ρ este practic constant. Atunci presiunea aerului din eprubetă egalează presiunea hidrostatică a coloanei de mercur ρgx plus presiunea atmosferică p_o :

$$p = p_o + \rho gx = p_o + \rho g(2h - V/S) =$$
$$= 3p_o - \rho gV/S = 3p_o - p_o V/(Sh) = a + bV , \quad (1)$$

adică presiunea aerului variază *liniar* cu volumul, stările extreme având parametrii ($2p_o$, Sh , T) , (p_o , $2Sh$, T), temperatura fiind aceeaşi în stările *1* , *2* (fiindcă pV este acelaşi). Temperatura este maximă acolo unde produsul pV este maxim :

$$pV = [3p_o - p_o V / (Sh)]\ V = [p_o / (Sh)]\ (3Sh - V)\ V . \qquad (2)$$

Deoarece suma ultimilor doi factori este *constantă*, *produsul* lor este *maxim* când ei sunt egali :

$$3\ Sh - V = V \rightarrow \quad V_m = 3Sh / 2 , \qquad (3)$$

introducând în (1) rezultă $p_m = 3\ p_o / 2$. Considerăm acum transformarea *generală* de la **1** la **B** :

$$2p_o \cdot Sh / T = (3p_o / 2)(3Sh / 2)\ :\ T_{max} ,$$

$$T_{max} = T \cdot 9/8 = 315\ K = 42^oC . \qquad (4)$$

Se poate judeca şi astfel : Trasăm familia de *izoterme*. Observăm că există în general 2 puncte de intersecție cu graficul procesului - cele două volume. Izoterma cu temperatura maximă este *tangentă* la dreapta procesului, deci cele două rădăcini pentru V (sau p) se confundă (după aceea avem rădăcini complexe).

$$p = 3p_o - p_o V / (Sh)\ \ \&\ \ pV = c = \text{const} \Rightarrow [3p_o - p_o V / (Sh)]V = c, (5)$$

$$V^2 \cdot p_o / (Sh) - V \cdot 3p_o + c = 0 . \qquad (6)$$

Această ecuație de gradul 2 în V are rădăcini confundate dacă discriminantul este nul şi atunci rădăcina dublă este [$- b / (2a)$] :

$$V_m = 3p_o : [2p_o / (Sh)] = 3\ Sh / 2 , \quad \text{etc.} \qquad (7)$$

Pentru a obține grafice folosim ecuația de stare :

$$pV = \nu RT , \quad [3p_o - p_o V / (Sh)]V = \nu RT \ \text{- parabolă} , \qquad (8)$$

$$pV = \nu RT , \quad p\ [3Sh - Sh \cdot p / p_o] = \nu RT \ \text{- parabolă} , (9)$$

fiind funcții *pătratice*.

1.3.11. ***Într-un cilindru vertical cu secțiunea*** S = 20 cm^2 , ***închis cu un piston care se poate mişca etanş fără frecări, se află gaz ideal. Se pune peste piston un corp de masă*** m = 5,0 kg ***şi se creşte temperatura absolută cu*** f = 10 % . ***S-a constatat că volumul gazului a scăzut cu acelaşi procentaj*** f . ***Aflați masa pistonului, presiunea atmosferică fiind* normală .**

Rezolvare. Gazul din cilindru suferă o transformare *generală*. Presiunea gazului este egală cu presiunea atmosferică la care se adaugă presiunea exercitată de greutatea pistonului (şi corpului) :

$$(H + m_o g / S)\ V / T = [H + (m_o + m)\ g / S](1 - f)\ V / [(1 + f)T] , \qquad (1)$$

$$m_o = m\ (1 - f) / (2f) - HS / g = 1{,}83\ kg . \qquad (2)$$

1.3.12. ***Un vas de masă*** M = 2,00 kg ***şi lungime*** L = 1,00 m, ***cu rotile, se poate mişca fără frecare pe un plan orizontal. Vasul este împărţit în două jumătăţi. În jumătatea stângă se află gaz ideal de masă*** m = 40 g ***şi temperatură*** T , ***iar jumătatea dreaptă este vidată. La un moment dat peretele despărţitor se deschide. Care va fi temperatura finală a gazului şi cu cât se deplasează vasul ?***

Rezolvare. Din experienţa lui **J. P. Joule** (1843) privind energia internă a gazului ideal se ştie că *la destinderea gazului în* ***vid*** *nu se efectuează lucru mecanic* şi *energia internă a gazului ideal depinde* **numai de temperatură** *şi nu depinde de volum*. Prin urmare, in cazul nostru temperatura gazului nu se schimbă, el nu efectuează lucru mecanic şi nu face schimb de căldură cu exteriorul ($T_{final} = T$).

Alegem axa *Ox* orizontală, cu sensul spre dreapta, cu originea în centrul vasului. Atunci, nefiind forţe orizontale, centrul de masă (CM) al sistemului rămâne pe loc, şi deoarece jumătate din gaz se duce în jumătatea din dreapta, vasul se va deplasa spre stânga :

$x_{CM} = [m(-L/4) + M \cdot 0] : (m+M) = x'_{CM} = [(m+M)s : (m+M)$, (1)

$s = -(L/4)\,m : (m + M) = -5{,}0$ mm (spre stânga). (2)

1.3.13. ***Un gaz ideal suferă procesul din figură. Se cunosc temperaturile*** $T_1 = 250$ K , $T_2 = 300$ K . ***Aflaţi*** T_3 . ***Reprezentaţi procesul în diagramele*** V - T ***şi*** p - T .

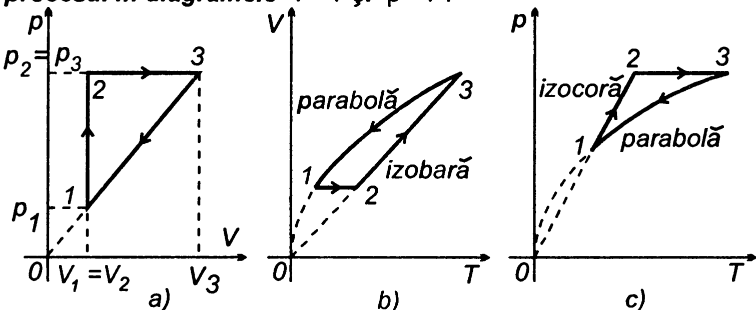


Fig.1.3.13

Rezolvare. Pentru transformarea *izocoră 1 - 2* avem :

$T_1 / T_2 = p_1 / p_2 = p_1 / p_3$. (1)

Pe de altă parte, pentru transformarea *liniară 1 - 3* avem (din asemănarea triunghiurilor) :

$p_1 / p_3 = V_2 / V_3$, dar $V_2 / V_3 = T_2 / T_3$ (izobara *2 - 3*). (2)

Egalând (1) cu (2) obținem :

$p_1 / p_3 = T_1 / T_2 = T_2 / T_3 \rightarrow T_3 = T_2^2 / T_1 = 360$ K. (3)

Ecuația procesului *1 - 3* este reprezentată de o *dreaptă* în diagrama *p - V*, deci are ecuația de forma : $p = a \cdot V$ (a = const). Atunci, folosind ecuația de stare avem :

$pV = \nu RT \rightarrow aV^2 = \nu RT$ - parabolă , (4)

$pV = \nu RT \rightarrow p^2 / a = \nu RT$ - parabolă . (5)

În diagrama *V - T*, respectiv *p - T*, izobara, respectiv izocora, se reprezintă printr-o *dreaptă* trecând prin origine (v. figura). În *V - T* sensul de parcurgere a ciclului se inversează .

1.3.14. ***Un gaz ideal suferă procesul din figură:*** $V_1 = 1{,}00$ L, $V_2 = 4{,}00$ L, $T_1 = 100$ K, $T_3 = 300$ K. ***Pe porțiunea*** 2 - 3 ***există o stare*** 4 ***cu*** $p_4 = p_1$. ***Aflați*** V_4 . ***Reprezentați procesul în diagramele*** p - V ***și*** p - T .

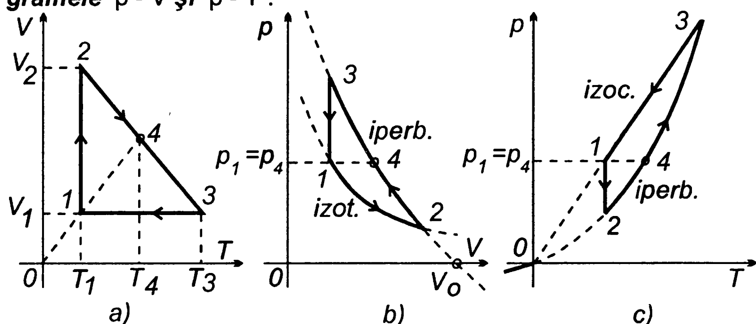


Fig.1.3.14

Rezolvare. Din asemănarea triunghiurilor avem :

$(V_2 - V_1) : (V_4 - V_1) = (T_3 - T_1) : (T_3 - T_4)$. (1)

Pe de altă parte, pentru transformarea *izobară 1 - 4* avem :

$V_4 / V_1 = T_4 / T_1$, $T_4 = T_1 \cdot V_4 / V_1$. (2)

Introducem V_4 (2) în (1) şi obținem :

$V_4 = (V_2 T_3 - V_1 T_1) : [T_3 + T_1(V_2 / V_1 - 2)] = 2{,}2$ L . (3)

Ecuația procesului *2 - 3* se scrie

$V = V_o - a\,T \rightarrow T = (V_o - V) / a$. (4)

Atunci ecuația de stare dă:

$p = \nu RT / V = \nu R(V_o - V) / (aV)$ - iperbolă , (5)

$p = \nu RT / V = \nu R\,T / (V_o - a\,T)$ - iperbolă . (6)

1.3.15. ***Un gaz ideal parcurge procesul ciclic din figură. Reprezentați procesul în diagramele*** V - T , p - T . ***Cunoscând volumele extreme*** $V_1 = 1{,}00$ L , $V_3 = 4{,}00$ L , ***aflați*** $V_2 = V_4$.

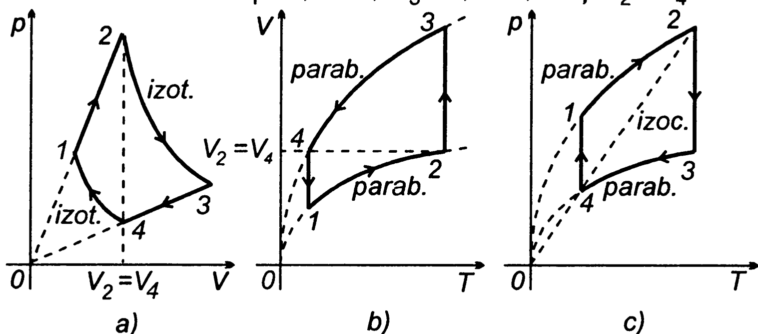


Fig.1.3.15

Rezolvare. Ecuațiile proceselor *1 - 2*, *3 - 4* sunt

$p = a_1 V, \quad p = a_2 V, \ a_1 > a_2 .$ (1)

Atunci ecuația de stare dă

$pV = \nu RT, \quad a_{1,2}V^2 = \nu RT, \ V = \sqrt{\nu RT / a_{1,2}}$ - parabole . (2)

Pentru transformările *izoterme* avem:

$p_1V_1 = p_4V_4 = p_4V_2$, respectiv $p_2V_2 = p_3V_3$. (3)

Înlocuind aici (1), obținem

$a_1V_1^2 = a_2V_2^2$, respectiv $a_1V_2^2 = a_2V_3^2$. (4)

Împărțind membru la membru aceste ecuații eliminăm $a_{1,2}$:

$V_1^2 / V_2^2 = V_2^2 / V_3^2 \ \rightarrow \ V_2 = V_4 = \sqrt{V_1V_3} = 2{,}00$ L. (5)

1.3.16. ***Un cilindru orizontal este împărțit în două jumătăți de lungime*** $\ell = 13$ cm ***fiecare, de un piston de arie*** $S = 100$ cm^2 , ***care se mişcă etanş fără frecări. De o parte şi de alta sunt gaze diferite aflate la aceeaşi temperatură*** T = 300 K ***şi pistonul este în echilibru. Cu cât se va deplasa pistonul dacă într-o parte a cilindrului încălzim gazul cu*** $\Delta T = 30$ K, ***iar în cealaltă păstrăm temperatura neschimbată ?***

Rezolvare. Gazul din fiecare compartiment suferă o transformare **generală** :

$pV/T = p'(V + Sx)/(T + \Delta T), \quad pV/T = p'(V - Sx)/T$.(1)

Împărțind ecuațiile membru la membru, obținem

$1 = [(V + Sx)/(V - Sx)] \cdot T/(T + \Delta T)$

$\rightarrow x = (V/S) \cdot \Delta T : (2T + \Delta T) = \ell \cdot \Delta T : (2T + \Delta T) = 1{,}0$ cm.(2)

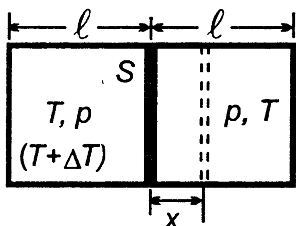


Fig.1.3.16

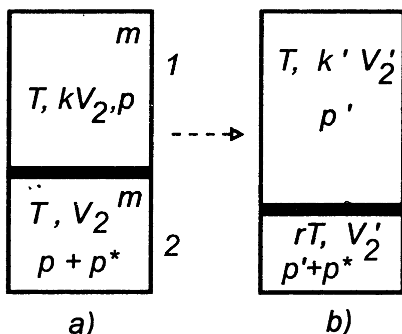


Fig.1.3.17

1.3.17. ***Într-un cilindru închis, aşezat vertical, pistonul, care se mişcă etanş fără frecări, împarte gazul ideal în două mase egale cu aceeaşi temperatură, volumul superior fiind de*** k = = 3,0 ori ***mai mare decât cel inferior. În ce raport*** r ***trebuie schimbată temperatura absolută a volumului inferior pentru ca acesta să devină de*** k ' ori ***mai mare decât cel superior ?***

Rezolvare. În cele două compartimente fiind mase egale din acelaşi gaz, cu aceeaşi temperatură, ele sunt legate prin transformarea *izotermă* :

$$p \cdot kV_2 = (p + p^*)V_2 \,, \tag{1}$$

unde p^* este presiunea exercitată de greutatea pistonului. Din (1) rezultă : $p^* = p(k - 1)$. (2)

De asemenea, gazul din jumătatea superioară suferă transformarea *izotermă* : $p \cdot kV_2 = p' \cdot k'V_2'$, (3)

iar gazele din cele două compartimente în starea finală sunt legate prin transformarea *generală* :

$$p' \cdot k'V_2' / T = (p' + p^*) \cdot V_2' / (rT) \,. \tag{4}$$

Ţinând seama că volumul total este acelaşi :

$$V_2 + kV_2 = V_2' + k'V_2' \rightarrow V_2'/V_2 = (1 + k)/(1 + k') \,, \tag{5}$$

atunci din (3) şi (2) rezultă :

$$p = p'(k'/k)(1 + k)/(1 + k') \,,\ p^* = p'(k'/k)(k^2 - 1)/ 1 + k') . \tag{6}$$

În sfârşit, din (4) scoatem raportul cerut, ţinând seama de (6) :

$$r = (p' + p^*)/(p'k') = 1/k' + (1/k) \cdot (k^2 - 1)/(1 + k') = 47/60 \,. \tag{7}$$

*

1.4. Ecuația de stare

1.4.1. ***Rețeaua cristalină a*** Fe ***la temperatura camerei este cubică cu volum centrat. Știind densitatea*** $\rho = 7870$ kg/m^3, ***aflați distanța minimă dintre atomi.***

Rezolvare. Fie ℓ - latura celulei cubice. Atunci unei astfel de celule îi revin: $1 + (1/8) \cdot 8 = 2$ atomi, fiindcă fiecare din cei 8 atomi din colțurile celulei aparțin la 8 celule vecine. Pe de altă parte, volumul unui mol (at.-g) de fier este A/ρ şi deci unui atom îi revine volumul :

$$v_0 = (1/N_A) \cdot A/\rho \,. \qquad (1)$$

Prin urmare volumul unei celule elementare este $2v_0$. Distanța *minimă* dintre atomi este jumătate din diagonala spațială a celulei :

$$a_{min} = \frac{\sqrt{3}\cdot \ell}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{2v_0} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{2A}{N_A \rho}} = 2{,}5 \text{ Å} \,. \qquad (2)$$

1.4.2. ***Calculați masa molară*** **medie** ***(aparentă) a aerului știind densitatea aerului în condiții*** **normale** $\rho = 1{,}2928$ kg/m$^3 \approx$ $\approx 1{,}293$ kg/m^3 ***și*** **volumul molar** ***al gazelor în condiții normale.***

Rezolvare. *Volumul molar* este volumul unui mol. Dar volumul molar al diferitelor gaze (*ideale*), luate în aceleaşi condiții de presiune şi temperatură este acelaşi (consecință a *legii lui* ***Avogadro***). Dacă aceste condiții sunt *normale*, valoarea volumului molar este $V_{\mu o} = 22{,}4141$ L/mol (este o constantă a fizicii). Masa molară este masa unui mol, prin urmare

$$\mu_a = \rho_o V_{\mu o} = 28{,}97 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol} \approx 0{,}029 \text{ kg/mol}. \qquad (1)$$

1.4.3. ***Volumul specific al unui gaz în condiții*** **normale** ***este*** $v_o = 5{,}6$ m^3/kg. ***Știind volumul molar al gazelor (ideale) în condiții*** **normale,** ***aflați masa molară a gazului.***

Rezolvare. *Volumul specific* este volumul unității de masă :

$$v = V/m = 1/\rho \,. \qquad (1)$$

La fel ca în problema precedentă avem

$$\mu = \rho_o V_{\mu o} = (1/v_o)\, V_{\mu o} = 4{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol} \qquad (2)$$

(poate fi de exemplu, heliu).

1.4.4. ***Fie*** m_i ***masele şi*** μ_i ***masele* molare *ale gazelor componente*** $(i = 1, 2, ...)$ ***dintr-un* amestec**, m - ***masa totală şi*** μ - ***masa molară* aparentă *(medie) a amestecului***, $g_i = m_i / m$ - ***fracţiunile (sau procentajele)* masice *ale gazelor componente din amestec.***

a) ***Demonstraţi relaţia de* aditivitate *a numărului de moli la amestecuri sau relaţia de calcul a masei molare* medii :**

$$m / \mu = \Sigma (m_i / \mu_i) \quad \text{sau} \quad 1 / \mu = \Sigma (g_i / \mu_i) .$$

b) *Stabiliţi relaţia de calcul a masei molare* medii *la gaze, ştiind fracţiunile* volumice $r_i = V_i / V$ ***ale gazelor componente.***

c) *Stabiliţi formulele de trecere între* g_i ***şi*** r_i .

Rezolvare. a) Ştim că într-un *mol* din orice substanţă există un număr de molecule N_A (*numărul lui* ***Avogadro***). Atunci în $\nu = m / \mu$ moli vor fi $\nu N_A = mN_A / \mu$ molecule. Să luăm $\nu = m / \mu$ moli de amestec, unde μ este masa molară *medie* (sau aparentă).
Pe de o parte în această cantitate sunt global mN_A / μ molecule, iar

pe de altă parte, sunt $\Sigma \nu_i N_A$ molecule, unde $\nu_i = m_i / \mu_i$ sunt cantităţile din fiecare substanţă componentă :

$$\nu N_A = (m / \mu)N_A = \Sigma \nu_i N_A = \Sigma (m_i / \mu_i) N_A , \qquad (1)$$

de unde simplificând cu N_A rezultă relaţia din enunţ .

b) Numărul de moli se poate calcula (în afară de formula cunoscută $\nu = m / \mu$) şi cu formula $\nu = V / V_\mu$. La *gaze*, luate în *aceleaşi* condiţii de presiune şi temperatură, volumul molar V_μ este *acelaşi*. Luăm o cantitate ν moli de amestec. Atunci masa acestei cantităţi este, pe de o parte, global, $m = \nu \mu = (V / V_\mu) \mu$, unde μ este masa molară *medie*, şi pe de altă parte, este suma maselor gazelor componente $\Sigma \nu_i \mu_i$, deci

$$m = \nu \mu = (V / V_\mu) \mu = \Sigma \nu_i \mu_i = \Sigma (V_i / V_\mu) \mu_i = \Sigma (r_i V / V_\mu) \mu_i , \qquad (2)$$

de unde simplificând cu V / V_μ , rezultă relaţia cerută :

$$\mu = \Sigma r_i \mu_i . \qquad (3)$$

c) Avem proporţiile la gaze :

$$r_1 : r_2 : r_3 :...= (V_1/V):(V_2/V):(V_3/V):...= (V_1/V_\mu):(V_2/V_\mu):(V_3/V_\mu):...=$$
$$= \nu_1 : \nu_2 : \nu_3 :...= (m_1/ \mu_1):(m_2/ \mu_2):(m_3/ \mu_3):...=$$
$$= (g_1 m / \mu_1):(g_2 m / \mu_2):(g_3 m / \mu_3):...= (g_1/ \mu_1):(g_2/ \mu_2):(g_3/ \mu_3):...,(4)$$

de unde rezultă :

$$r_i : \Sigma r_k = r_i = (g_i / \mu_i) : \Sigma(g_k / \mu_k) = \mu g_i / \mu_i \,, \qquad (5)$$

unde $\Sigma r_k = 1$, $1 / \mu = \Sigma(g_k / \mu_k)$. (6)

Analog avem proporțiile la gaze:

$g_1 : g_2 : g_3 : ... = (m_1/ m) : (m_2/ m) : (m_3/ m) : ... =$

$= (\nu_1\mu_1) : (\nu_2\mu_2) : (\nu_3\mu_3) : ...= (V_1\mu_1/V_\mu) : (V_2\,\mu_2/V_\mu) : (V_3\,\mu_3/V_\mu) : ...=$

$= (V_1\mu_1/ V) : (V_2\,\mu_2/ V) : (V_3\,\mu_3/ V) : ...= r_1\mu_1 : r_2\mu_2 : r_3\mu_3 : ...,$ (7)

de unde rezultă:

$$g_i : \Sigma g_k = g_i = r_i\,\mu_i : \Sigma(r_k\,\mu_k) = r_i\,\mu_i / \mu \,, \qquad (8)$$

unde $\Sigma g_k = 1$, $\mu = \Sigma(r_k\,\mu_k)$ (9)

1.4.5. ***În figură este reprezentat un proces la presiune constantă, în funcție de*** T . ***Reprezentați grafic cum variază masa gazului în funcție de*** T .

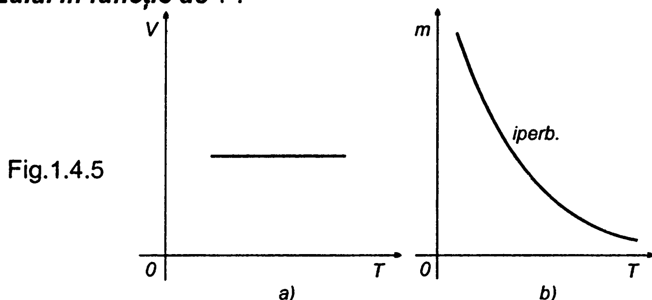


Fig.1.4.5

Rezolvare. Conform enunțului $p = \text{const}$, iar conform figurii $V = \text{const}$, atunci ecuația de stare dă:

$$pV = (m / \mu)RT \quad \Rightarrow \quad mT = \text{const} \,. \qquad (1)$$

Aceasta reprezintă o *iperbolă* în diagrama m - T .

1.4.6. ***Un gaz suferă transformarea reprezentată în figură.***

a) ***Dacă masa este constantă, cum a variat presiunea gazului ?***

b) ***Dacă presiunea este constantă, cum a variat masa gazului ?***

Rezolvare. Ducem prin origine drepte trecând prin stările *1*, *2*. Aceste drepte în diagrama V - T au ecuația :

$$V = \text{const} \cdot T \,, \quad \text{dar} \quad V = [mR / (\mu p)] \cdot T \,. \qquad (1)$$

a) Dacă $m = \text{const}$, *panta* acestor drepte este ~ $1 / p$, deci de la *1* la *2* presiunea *scade.*

b) Dacă $p = \text{const}$, *panta* este ~ m , deci de la *1* la *2* masa crește.

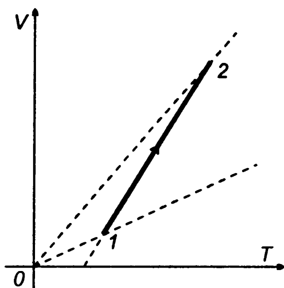


Fig.1.4.6

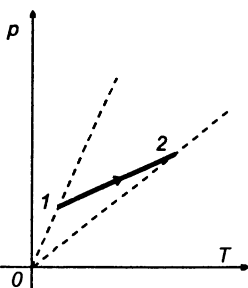


Fig.1.4.7

1.4.7. ***Un gaz suferă transformarea reprezentată în figură.*** a) ***Dacă masa este constantă, cum a variat volumul ?*** b) ***Dacă volumul este constant, cum a variat masa gazului ?***

Rezolvare. Ducem prin origine *drepte* trecând prin stările *1, 2.* Aceste drepte, în diagrama p - T, au ecuația :

$p = \text{const} \cdot T$, dar $p = [mR / (\mu V)] \cdot T$. (1)

a) Dacă masa este constantă, *panta* acestor drepte este $\sim 1 / V$, deci de la *1* la *2* volumul crește.

b) Dacă volumul este constant, *panta* este $\sim m$, deci de la *1* la *2* masa scade.

1.4.8. ***O masă dată de gaz suferă transformarea reprezentată în figură. Cum a variat volumul în această transformare ?***

Rezolvare. Ducem *izocorele* prin cele 3 stări. Ecuația izocorelor este

$$p = [mR / (\mu V)] \cdot T \ , \qquad (1)$$

deci *panta* este invers proporțională cu volumul, $\sim 1 / V$. Prin urmare, de la *1* la *2* volumul scade, apoi de la *2* la *3* crește, trecând în starea *1'* prin același volum ca în starea intială *1* . În starea *3* volumul este *maxim* ($V_3 > V_1$) .

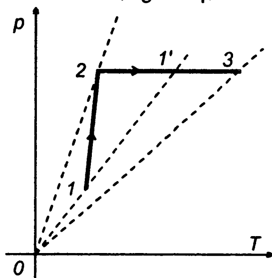


Fig.1.4.8

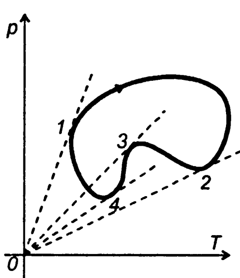


Fig.1.4.9

1.4.9. ***Un gaz ideal suferă o transformare la volum constant, reprezentată în figură. În ce puncte ale transformării masa gazului are valori*** **extreme ?**

Rezolvare. Ducem prin origine *drepte tangente* la ciclu :

$$p = [mR/(\mu V)] \cdot T . \quad (1)$$

Panta acestor drepte este proporțională cu masa : $[mR/(\mu V)] \sim m$. Prin urmare, în *1* şi *2* masa este maximă, respectiv minimă, iar în *3*, *4* este maximă, respectiv minimă *relativă* .

1.4.10. ***O masă*** $m = 10{,}0$ g N_2 ***suferă transformarea liniară din figură, unde*** $p_1 = 300$ kPa , $V_1 = 4{,}00$ L ; $p_2 = 100$ kPa, $V_2 = 8{,}00$ L. ***Ce temperatură*** **maximă** ***atinge gazul şi care sunt parametrii de stare în acel moment ? Reprezentați procesele şi în diagramele*** V - T , p - T.

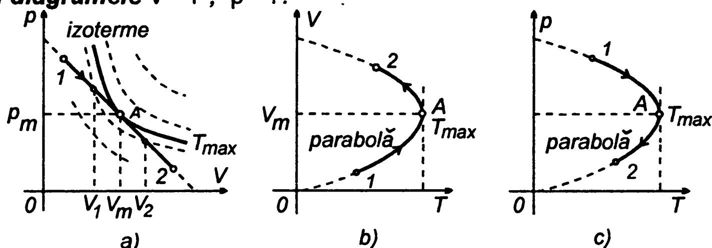


Fig.1.4.10

Rezolvare. Ecuația procesului este de forma :

$$p = p_o - aV, \qquad \text{dar} \quad p_{1,2} = p_o - aV_{1,2}, \quad (1)$$

$$p_o = (V_2 p_1 - V_1 p_2) : (V_2 - V_1) = 500 \text{ kPa},$$

$$a = -(p_2 - p_1) : (V_2 - V_1) = 50{,}0 \text{ kPa/L}. \quad (2)$$

Folosind ecuația de stare şi ecuația procesului (1) avem

$$\nu RT = pV = (p_o - aV) \cdot V = a(p_o/a - V)\,V . \quad (3)$$

Suma celor doi factori fiind *constantă*, produsul lor este maxim când ei sunt egali :

$$p_o/a - V = V \;\Rightarrow\; V_m = p_o/(2a) = 5{,}0 \text{ L}, \quad (4)$$

$$p_m = p_o - aV_m = p_o/2 = 250 \text{ kPa},$$

$$T_m = p_m V_m/(mR) = 421 \text{ K} = 148^oC . \quad (5)$$

Se poate judeca şi altfel. Ecuația (3) pentru *T* este *pătratică* şi se reprezintă, deci, printr-o *parabolă*, care are un *maxim* (coeficientul lui V^2 este negativ , $-a$) pentru

$$V_m = [-b/(2a)] = -p_o/(-2a), \text{ etc.} \quad (6)$$

În sfârşit, dacă trasăm familia de ***izoterme*** pV = const şi le intersectăm cu *dreapta* procesului, $pV = \text{const} = (p_o - aV) \cdot V$, (7) observăm că pentru diferite izoterme obţinem fie două puncte de intersecţie, deci două valori pentru volum (două rădăcini reale distincte), fie o rădăcină *dublă* dată de izoterma ***tangentă*** la dreaptă, care dă T_{max}, fie nici un punct de intersecţie (rădăcini complexe pentru $T > T_{max}$). Prin urmare, punctul căutat corespunde rădăcinii *duble* a ecuaţiei (7), deci discriminantul trebuie să fie egal cu zero şi rădăcina dublă este chiar (6).

Pentru trasarea graficelor observăm că

$pV = \nu RT \rightarrow (p_o - aV)\, V = \nu RT$ - parabolă, (8)

$p = \nu RT / V = \nu RT \cdot a / (p_o - p)$ - parabolă. (9)

1.4.11. ***Prin ventilul unui balon a ieşit gaz, astfel încât presiunea a scăzut cu*** $f_1 = 40\ \%$, ***iar temperatura absolută a scăzut cu*** $f_2 = 20\ \%$. ***Cât la sută din masa gazului a ieşit afară din balon ?***

Rezolvare. Aplicăm ecuaţia de stare pentru cele două stări :

$p_1V = (m_1/\mu)RT_1$, $(1 - f_1)p_1 \cdot V = [(1 - f)m / \mu]\, R(1 - f_2)T_1$, (1)

de unde prin împărţire membru la membru rezultă :

$f = (f_1 - f_2) : (1 - f_2) = 25\ \%$. (2)

1.4.12. ***Un balon poate conţine*** $m_1 = 0{,}100$ kg O_2 ***în condiţii* normale. *Ce masă de*** CO_2 ***poate conţine balonul la temperatura*** $t = 13^oC$ **şi presiunea** $p = 1{,}60$ MPa ***?***

Rezolvare. Scriem ecuaţia de *stare* în cele două cazuri :

$p_oV = (m_1 / \mu_1)\, RT_o$, $pV = (m_2 / \mu_2)\, RT$, (1)

de unde, prin împărţire membru la membru, obţinem :

$m_2 = m_1\, \mu_2 p\, T_o : (\mu_1 p_{\ o} T) = 2{,}1$ kg . (2)

1.4.13. ***Un pahar cilindric de secţiune*** $S = 9{,}8\ cm^2$ ***şi masa*** $m = 200$ g ***este aşezat cu gura în jos pe un plan orizontal neted de cauciuc, temperatura fiind*** $t = 27^oC$ ***şi presiunea atmosferică*** $H = 100$ kPa . ***Până la ce temperatură trebuie încălzit paharul pentru ca din el :* a) *să înceapă să iasă aer ,* b) *să iasă*** $f = 25\ \%$ ***din masa de aer.* c) *Cu ce forţă va apăsa paharul pe plan dacă acum răcim paharul până la temperatura iniţială ?***

Rezolvare. a) Presiunea aerului încălzit din pahar trebuie să echilibreze presiunea atmosferică plus presiunea datorită greutăţii paharului $p = H + mg / S$, deci, transformarea fiind *izocoră* :

$(H + mg / S):H = T_1:T \rightarrow T_1 = T(H + mg / S) : H = 306 \text{ K} = 33^oC$.(1)

b) Aerul poate să iasă din pahar numai dacă presiunea sa $p \geq H + mg / S$, deci pentru cele două stări :

$$H \cdot Sh = (M / \mu)RT, \qquad (H + mg / S) \cdot Sh = (1 - f)(M / \mu)RT_2,$$

$T_2 = [T / (1 - f)] (H + mg / S) / H = T_1 / (1 - f) = 408 \text{ K} = 135^oC$. (2)

c) Forța cu care paharul apasă pe planul orizontal este egală cu greutatea sa mg plus forța de apăsare asupra fundului paharului datorită *diferenței* de presiune din exterior (atmosferică) și interior $(H - p)S$. Scriem ecuația transformării ***izocore*** respective :

$p :(H + mg / S) = T : T_2 = (1 - f) H : (H + mg / S) \rightarrow p = (1 - f) H$,(3)

$$N = mg + (H - p)S = mg + f H S = 26{,}5 \text{ N}. \qquad (4)$$

1.4.14. ***Un balon de greutate*** **G = 580 N** ***este umplut cu o masă de heliu la aceeaşi presiune şi temperatură ca şi aerul ambiant. Aflați forța*** **ascensională.**

Rezolvare. Forța *ascensională* este diferența dintre forța *arhimedică* cu care balonul este împins de jos în sus și greutatea balonului (cu conținutul său). Forța arhimedică este egală cu greutatea volumului de fluid dezlocuit. Prin urmare,

$$F = [pV / (RT)]\, \mu_{aer} \cdot g - mg - G. \qquad (1)$$

Dar pentru masa de heliu avem ecuația de ***stare*** :

$pV = (m/ \mu_{He})RT \rightarrow m_{aer\ dezl.} = [pV / (RT)]\, \mu_{aer} = m \cdot \mu_{aer} / \mu_{He}$, (2)

$$F = mg(\mu_{aer} / \mu_{He} - 1) - G = 400 \text{ N}. \qquad (3)$$

1.4.15. ***Un vas cilindric orizontal, de lungime*** $\ell = 85$ cm , ***este împărțit în două părți printr-un piston care se poate mişca etanş fără frecări. Într-o parte se introduce o masă de oxigen, iar în cealaltă parte o masă egală de hidrogen la aceeaşi temperatură. Ce lungime din cilindru va ocupa oxigenul ?***

Rezolvare. Pistonul fiind în *echilibru mecanic*, de o parte și de alta presiunea este aceeași. Scriem ecuația de stare pentru cele două gaze : $pSx = (m / \mu_1)RT$, $\quad pS(\ell - x) = (m / \mu_2)RT$, (1) de unde, prin împărțire membru la membru, rezultă :

$$x = \ell \cdot \mu_2 : (\mu_1 + \mu_2) = 5{,}0 \text{ cm}. \qquad (2)$$

1.4.16. ***Un cilindru orizontal închis este împărțit în două jumătăți printr-un piston care se poate mişca etanş fără frecări. În cele două jumătăți se află mase egale de azot, respectiv oxigen. Cu cât la sută se schimbă volumul fiecărui gaz după ce pistonul se eliberează şi se stabileşte echilibrul final (la aceeaşi temperatură ?***

Rezolvare. Notăm volumul fiecărei jumătăți cu V şi scriem *ecuația de stare* pentru fiecare gaz în starea finală de echilibru, când presiunea de o parte şi de alta a pistonului va fi aceeaşi :

$p(V + \Delta V) = (m / \mu_1)RT$, $p' (V - \Delta V) = (m / \mu_2)RT$, (1)

de unde , prin împărțire membru la membru, rezultă:

$\Delta V / V = (\mu_2 - \mu_1) : (\mu_2 + \mu_1) = 3{,}3\ \%$. (2)

1.4.17. ***În cele două jumătăți ale unui cilindru orizontal, fiecare de lungime*** $\ell = 10{,}0$ cm , ***separate printr-un piston care se poate mişca etanş fără frecări, se află mase egale din acelaşi gaz la aceeaşi temperatură a mediului ambiant. Într-una din jumătăți se introduce suplimentar o masă*** m_0 ***din acelaşi gaz de*** $k = 8{,}0$ *ori* ***mai mare decât masa inițială*** m ***din acel compartiment. Aflați cu cât se deplasează pistonul.***

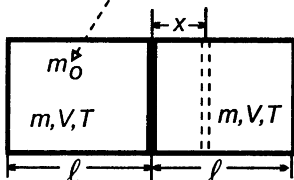


Fig.1.4.17

Rezolvare. Scriem *ecuația de stare* pentru gazele din cele două compartimente, în starea finală. Din condiția de *echilibru mecanic* a pistonului presiunea trebuie să fie aceeaşi :

$p' (\ell + x)S = [(m + m_0) / \mu]RT$, $p' (\ell - x)S = (m / \mu)RT$, (1)

de unde prin împărțire membru la membru, obținem :

$x = \ell \cdot m_0 : (2m + m_0) = \ell \cdot k : (2 + k) = 8{,}0$ cm . (2)

1.4.18. ***Un cilindru orizontal închis, de volum*** V = 3,00 L, ***este împărțit în două compartimente printr-un piston termoizolant, mobil, etanş, fără frecări, aflat în echilibru mecanic. Într-un compartiment se află*** $\nu_1 = 2{,}00$ mol ***de gaz la temperatura*** $t_1 = 27^oC$, ***iar în celălalt*** $\nu_2 = 3{,}00$ mol ***din alt gaz la*** $t_2 = 127^oC$. ***Aflați volumele*** $V_{1,2}$. ***La ce temperaturi pistonul va fi la* mijlocul *cilindrului ?***

Rezolvare. Presiunea de o parte şi de alta a pistonului este aceeaşi, fiindcă pistonul este în *echilibru mecanic.* Scriem *ecuația de stare* pentru cele două gaze :

$pV_1 = \nu_1 RT_1$, $pV_2 = \nu_2 RT_2 \rightarrow V_1 / V_2 = \nu_1 T_1 / (\nu_2 T_2)$, (1)

dar $V = V_1 + V_2$, astfel încât rezultă :

$$V_1 = V \cdot \nu_1 T_1 : (\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2) = 1{,}00 \text{ L},$$
$$V_2 = V \cdot \nu_2 T_2 : (\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2) = 2{,}00 \text{ L}. \quad (2)$$

Dacă pistonul se află la mijloc : $V_{1,2} = V/2$ şi ecuaţiile de *stare* sunt acum :

$$p' V/2 = \nu_1 R T_1', \quad p' V/2 = \nu_2 R T_2' \quad \rightarrow \quad T_1'/T_2' = \nu_2/\nu_1 = 3/2. \quad (3)$$

Temperaturile cerute trebuie să fie în raportul 3 / 2. Pentru a le determina separat mai trebuie o condiţie. De exemplu, dacă cerem în plus ca presiunea să rămână neschimbată $p' = p$, atunci avem transformările ***izobare*** :

$$(V/2) : V_1 = T_1'/T_1, \qquad (V/2) : V_2 = T_2'/T_2, \quad (4)$$

de unde rezultă, ţinând seama de (2),

$$T_1' = T_1 \cdot (\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2)/(2\nu_1) = 450 \text{ K},$$
$$T_2' = T_2 \cdot (\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2)/(2\nu_2) = 300 \text{ K}, \quad (5)$$

1.4.19. ***Un vas cilindric orizontal este împărţit cu ajutorul unui piston termoconductor, mobil etanş, fără frecări, în două compartimente cu raportul volumelor*** $V_1/V_2 = 3/2$. ***Temperaturile iniţiale ale gazului*** $t_1 = 27^oC$, $t_2 = 127^oC$, ***pistonul fiind în echilibru mecanic. Care va fi raportul volumelor după stabilirea echilibrului termic ?***

Rezolvare. Pistonul fiind în *echilibru mecanic*, presiunea de o parte şi de alta este aceeaşi. Scriem ecuaţia de stare pentru gazele din cele două compartimente :

$$pV_1 = \nu_1 R T_1, \; pV_2 = \nu_2 R T_2 \quad \rightarrow \quad \nu_1/\nu_2 = V_1 T_2/(V_2 T_1); \quad (1)$$
$$p' V_1' = \nu_1 R T, \quad p' V_2' = \nu_2 R T, \quad (2)$$

de unde rezultă : $V_1'/V_2' = \nu_1/\nu_2 = V_1 T_2/(V_2 T_1) = 2{,}00$. (3)

1.4.20. ***Dintr-un balon de volum*** $V = 200$ L ***conţinând gaz la temperatura*** $T_1 = 273$ K ***şi presiunea*** $p_1 = 2{,}0$ MPa, ***s-a consumat o cantitate de gaz, care în condiţiile* normale *are volumul*** $V_o = 1{,}00$ Nm^3 **("normal-metru cub")**. ***Măsurând acum presiunea din balon s-a găsit*** $p_2 = 1{,}4$ MPa. ***La ce temperatură s-a măsurat această presiune ? Se cunoaşte volumul molar al gazelor în*** CN ***şi constanta gazelor*** R .

Rezolvare. În starea iniţială avem *ecuaţia de stare* :

$$p_1 V = \nu_1 R T_1. \quad (1)$$

Ştiind volumul pe care îl ocupă gazul consumat în condiţii *normale* (CN) $V_o = 1{,}00$ Nm^3 (Nm^3 - *normal-metru cub*, adică metru cub de

gaz în condiții ***normale*** de presiune şi temperatură) şi ştiind volumul molar al gazelor în CN ($V_{\mu o}$), putem afla numărul de moli de gaz consumat $\nu_{cons.} = V_o / V_{\mu o}$. Acum putem scrie *ecuația de stare* pentru gazul rămas în balon :

$$p_2 V = (\nu_1 - V_o / V_{\mu o}) R T_2 . \quad (2)$$

Introducând aici p_1 din (1) găsim temperatura cerută :

$$T_2 = p_2 V : \{ [p_1 V / (R T_1) - V_o / V_{\mu o}] R \} = 254{,}8 \text{ K} . \quad (3)$$

1.4.21. ***Într-un cilindru, sub un piston de arie*** S = 2,0 dm^2 ***(care se poate mişca etanş fără frecări), se află o masă*** m = 7,0 g ***azot. Mărind temperatura gazului cu*** ΔT = 100 K, ***pistonul urcă cu*** h = 10 cm , ***presiunea atmosferică fiind normală. Aflați masa pistonului .***

Rezolvare. Presiunea gazului echilibrează presiunea atmosferică H plus presiunea exercitată de piston, datorită greutății sale, Mg / S . Scriem *ecuația de stare* pentru cele două stări :

$$(H + Mg / S) V = (m / \mu) R T ,$$
$$(H + Mg / S)(V + Sh) = (m / \mu) R (T + \Delta T). \quad (1)$$

Scădem ecuațiile membru cu membru :

$$(H + Mg / S) Sh = (m / \mu) R \, \Delta T , \quad (2)$$
$$M = m \cdot R \, \Delta T / (\mu h g) - SH / g = 5{,}0 \text{ kg}. \quad (3)$$

1.4.22. ***Într-un cilindru vertical închis, de înălțime*** h = 60 cm, ***se află la mijloc în echilibru un piston mobil de masă*** m = = 20 kg . ***În partea inferioară se află*** m$_1$ = 80 mg H_2 , ***iar în par-tea superioară*** O_2 , ***temperatura ambelor gaze fiind*** T = 300 K . ***Aflați masa oxigenului.***

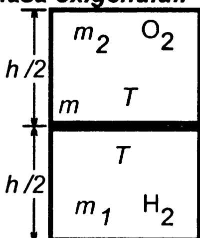


Fig.1.4.22

Rezolvare. Presiunea hidrogenului de sub piston echilibrează presiunea oxigenului de deasupra plus presiunea pistonului datorită greutății sale (mg / S). Scriem *ecuația de stare* pentru cele două gaze:

$$p_2 \cdot Sh / 2 = (m_2 / \mu_2) R T , \quad (p_2 + mg / S) \cdot Sh / 2 = (m_1 / \mu_1) R T . \quad (1)$$

Introducem p_2 din prima ecuație în a doua şi găsim masa cerută :

$$m_2 = m_1 \cdot \mu_2 / \mu_1 - mgh\,\mu_2 / (2RT) = 0{,}50 \text{ g} . \qquad (2)$$

1.4.23. ***Un încălzitor pentru apă consumă metan la presiunea*** p = 120 kPa ***şi temperatura*** t = 17°C ***cu randamentul*** η = = 60 % . ***Ce debit volumic de metan este necesar pentru a asigura un debit*** M* = 130 kg/h ***de apă încălzită cu*** ΔT = 80 K ***?***

Rezolvare. Căldura necesară încălzirii apei, per unitatea de timp este $M^*c\Delta T$. Pe de altă parte, dacă q este *puterea calorifică* a metanului, atunci căldura degajată per unitatea de timp, prin arderea metanului este m^*q, unde m^* este debitul de metan. Ţinând seama de randamentul încălzitorului, avem condiția :

$$M^*c\Delta T = \eta\, m^*q . \qquad (1)$$

Dar debitului *masic* de metan m^* îi corespunde debitul *volumic D* :

$$pD = (m^*/\mu)RT \quad \to \quad D = (m^*/\mu)RT/p , \qquad (2)$$

$$D = M^*c\Delta T \cdot RT / (\eta\, q\, \mu\, p) = 1{,}7 \text{ m}^3/\text{h} . \qquad (3)$$

Putem exprima debitul în *normal-metri cubi* (Nm^3) :

$$pD/T = p_oD_o/T_o \quad \to \quad D_o = D \cdot pT_o/(p_oT) = 1{,}9 \text{ Nm}^3/\text{h} . \qquad (4)$$

1.4.24. ***Un balon de volum*** V = 1,00 m³ , ***având masa învelişului*** m = 0,38 kg , ***este umplut cu*** He ***la temperatura*** t = = 27°C ***şi presiunea*** p = 124,6 kPa. ***Aflați înălțimea la care balonul va fi în*** **suspensie,** ***considerând că presiunea şi temperatura atmosferică scad aproximativ*** **liniar** ***cu înălțimea cu*** **gradientul** p* = 13,33 Pa/m , ***respectiv*** t* = 0,50 K/ (100 m) . ***La sol presiunea este*** **normală** ***şi temperatura*** t = 27°C.

Rezolvare. *Condiția de plutire* dă egalitatea dintre greutatea balonului împreună cu conținutul său şi greutatea aerului dezlocuit, şi anume:

$$mg + [\mu_{He}pV/(RT)]\,g = m_{aer\ dezl.}\,g \quad \to \quad m_{aer\ dezl.} = 0{,}58 \text{ kg}. \qquad (1)$$

La înălțimea h presiunea şi temperatura aerului sunt

$$p_h = H - p^* \cdot h , \qquad t_h = t - t^* \cdot h , \qquad (2)$$

astfel încât masa de aer dezlocuită este, pe de altă parte,

$$m_{aer\ dezl.} = \mu_{aer}\, p_hV/(RT_h) = \mu_{aer}(H - p^*h)V : [R(T - t^*h)] . \qquad (3)$$

Ţinând seama de (1) obținem

$$h = (HV - RT\, m_{aer\ dezl.}/\mu_{aer}) : (p^* - R\, t^* m_{aer\ dezl.}/\mu_{aer}) = 5{,}3 \text{ km}. \qquad (4)$$

1.4.25. ***O fiolă de volum*** V = 3,0 cm³ ***conține*** m = 5,0 g ***radiu. Radiul*** Ra-226 ***emite particule*** α ***(nuclee de heliu) cu perioada de înjumătățire*** $T_{1/2}$ = 1620 ani. ***Cu cât creşte presiunea din fiolă după*** t = 1,0 ani, ***temperatura fiind*** t° = 27°C ***?***

Rezolvare. Prin definiție 1 g Ra are *activitatea* :

$$A = 1 \text{ Ci (curie)} = 3{,}70 \cdot 10^{10} \text{ dezint./s} = $$
$$= 3{,}70 \cdot 10^{10} \text{ Bq (becquerel în SI)} . \quad (1)$$

Atunci în timpul t în fiolă vor apărea $N = A \cdot t$ atomi de heliu şi presiunea va creşte cu :

$$\Delta p = (N / V)\, kT = (At / V)(RT / N_A) = 8{,}0 \text{ kPa} . \quad (2)$$

Se poate judeca şi detaliat. Legea dezintegrării radioactive este cunoscută :

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \text{ unde } \lambda = (\ln 2) / T_{1/2} \text{ - constanta radioactivă.} \quad (3)$$

Activitatea unei surse reprezintă numărul de nuclee care se dezintegrează pe unitatea de timp :

$$A = - dN / dt = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N . \quad (4)$$

În cazul nostru $t = 1$ an $\ll$ $T_{1/2} = 1620$ ani, de aceea

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \approx \lambda N_0 \quad (5)$$

sau altfel

$$e^{-\lambda t} \cong 1 - \lambda t , \quad \text{dacă} \quad \lambda t \ll 1 , \quad N \cong N_0(1 - \lambda t) ,(6)$$

$$N_0 - N \cong N_0 \lambda t \cong At , \; N_0 = (m / \mu) N_A , \quad (7)$$

deci presiunea suplimentară :

$$\Delta p = [(N_0 - N) / V]\, kT \approx (N_0 \lambda t / V)(RT / N_A) =$$
$$= (m / \mu)\, [(\ln 2) / T_{1/2}]\, t\, RT / V = 8{,}0 \text{ kPa} . \quad (8)$$

1.4.26. ***Un balon conține aer la presiunea atmosferică*** H . ***Prin evacuarea unei părți din aer presiunea scade la*** p . ***Apoi se introduce în balon hidrogen până când presiunea amestecului devine din nou*** H . ***Se evacuează din nou o parte din amestec scăzând presiunea la*** p ***şi apoi se introduce tot hidrogen pentru a restabili presiunea*** H . ***Aflați raportul*** m_{H_2}/m_{aer} **al amestecului în acest moment.**

Rezolvare. După prima evacuare rămân în balon:

$$\nu_{aer} = pV / (RT) \text{ la care se adaugă } \nu_{H_2} = (H - p)\, V / (RT) . \quad (1)$$

După a doua evacuare numărul de moli se reduce în raportul p / H şi deci rămân în balon $\nu_{aer}\, p / H$ şi $\nu_{H_2}\, p / H$ moli , la care se adaugă $\nu'_{H_2} = (H - p)\, V / (RT)$, deci amestecul final conține :

$$\text{aer:} \quad \nu'_{aer} = [pV / (RT)]\, p / H , \quad (2)$$

$$\text{hidrogen :} \quad \nu''_{H_2} = [(H - p)\, V / (RT)]\, p / H + (H - p)\, V / (RT). \quad (3)$$

Raportul cerut este deci

$$m_{H_2}/m_{aer} = \nu''_{H_2}\mu_{H_2}/(\nu_{aer}/\mu_{aer}) = (\mu_{H_2}/\mu_{aer})\cdot(H^2 - p^2)/p^2 . \quad (4)$$

1.4.27. ***Un balon a fost cântărit vidat, obținându-se masa*** $m_1 = 1{,}000$ kg , ***apoi umplut cu oxigen la presiunea atmosferică normală, obținându-se*** $m_2 = 1{,}016$ kg, ***apoi umplut cu un gaz necunoscut la presiunea*** $p = 202{,}6$ kPa , ***obținându-se*** $m_3 =$ $= 1{,}044$ kg. ***Aflați masa molară a gazului necunoscut .***

Rezolvare. Pentru cele trei cântăriri (în *aer*) avem respectiv (m_b - masa balonului , F_A - forța arhimedică):

$$m_1 = m_b - F_A/g\,,\ m_2 = m_b + \mu_O p_o V/(RT) - F_A/g =$$
$$= m_1 + \mu_O p_o V/(RT)\,, \quad (1)$$
$$m_3 = m_b + \mu p V/(RT) - F_A/g = m_1 + \mu p V/(RT)\,. \quad (2)$$

Din aceste ecuații rezultă

$$(m_3 - m_1) : (m_2 - m_1) = \mu p/(\mu_O p_o) \ \rightarrow$$
$$\mu = \mu_O(p_o/p)\,(m_3 - m_1) : (m_2 - m_1) = 0{,}044 \text{ kg/mol} \quad (3)$$

(probabil CO_2) .

1.4.28. ***Un gaz se transformă după legea*** $V = B\,p$, $B =$ $=$ const. ***În ce raport se schimbă presiunea dacă temperatura se schimbă în raportul*** $T_2/T_1 = 2{,}25$ ***? Reprezentați procesul în diagramele*** p - V , V - T ***și*** p - T .

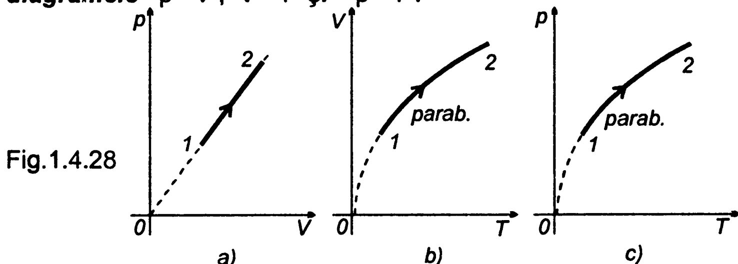


Fig.1.4.28

Rezolvare. Pentru cele două stări avem *ecuația de stare* :

$$\nu RT_1 = p_1V_1 = Bp_1^2\,, \qquad \nu RT_2 = p_2V_2 = Bp_2^2. \quad (1)$$

Prin împărțirea ecuațiilor membru la membru, obținem

$$p_2/p_1 = \sqrt{T_2/T_1} = 1{,}5\,.$$

Pentru grafic avem

$$\nu RT = pV = V^2/B \text{ - parabolă ,} \quad (3)$$
$$\nu RT = pV = B\,p^2 \text{ - parabolă .} \quad (4)$$

1.4.29. ***Volumul unei mase de gaz ideal variază cu temperatura după legea*** V = B T^n , B = const, n > 0 . ***Cum variază presiunea cu temperatura ? Dar presiunea cu volumul ? Trasați graficele respective.***

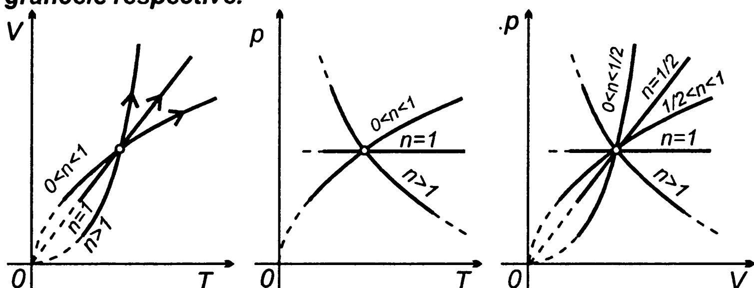


Fig.1.4.29

Rezolvare. $\nu RT = pV = p\,B\,T^n \rightarrow p = (\nu R / B)\cdot T^{1-n}$, (1)
deci presiunea crește cu temperatura dacă $0 < n < 1$ și scade cu temperatura dacă $n > 1$.

$pV = \nu RT = \nu R\cdot V^{1/n} / B^{1/n} \rightarrow \ p = (\nu R / B^{1/n})\cdot V^{1/n-1}$ (2)
cu variație asemănătoare celei precedente.

1.4.30. ***Se încălzește sau se răcește un gaz ideal, dacă el se destinde după legea*** p = B / V^n , B = const, n > 0 ? ***Reprezentați procesul în diagramele*** p - V , V - T ***și*** p - T .

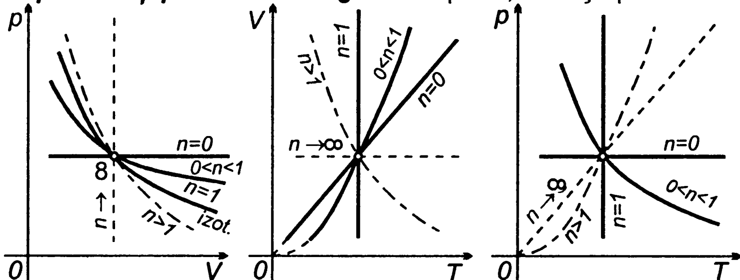


Fig.1.4.30

Rezolvare. $T = pV / (\nu R) = [B / (\nu R)]\cdot V^{1-n}$, (1)
deci pentru $0 < n < 1$ gazul se încălzește (la destindere), iar pentru $n > 1$ se răcește.

Pentru variabilele p - T avem

$p\cdot (B / p)^{1/n} = \nu RT \rightarrow \ p = (\nu R / B^{1/n})^{n/(n-1)}\cdot T^{n/(n-1)}$. (2)

1.4.31. ***O cantitate*** $\nu = 0{,}10$ mol ***de gaz ideal suferă o transformare după legea*** $p\sqrt{V} = A = 2{,}0 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{L}^{1/2}$. ***Când gazul atinge temperatura*** T_0 ***el suferă în continuare o transformare după legea*** $pV^2 = B = 16 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{L}^2$. ***Aflați temperatura*** T_0.

Rezolvare. În starea cu temperatura T_0 avem simultan :

$$\nu RT_0 = pV = A\sqrt{V}\ , \quad \nu RT_0 = pV = B / V\ , \tag{1}$$

de unde rezultă imediat

$$A\sqrt{V} = B / V \rightarrow V = (B / A)^{2/3}\ ,\ T_0 = B / (\nu RV) =$$

$$= [B / (\nu R)](A / B)^{2/3} = \frac{1}{\nu R}\sqrt[3]{A^2 B} = 482\ \mathrm{K} = 209^\circ\mathrm{C}\ . \tag{2}$$

1.4.32. ***Se numesc* politrope *transformările descrise de ecuația*** $pV^k = \text{const}$, ***unde*** k ***este un număr* real *numit* indice sau exponent politropic. *Cazuri particulare: izobara*** $k = 0$, ***izoterma*** $k = 1$, ***adiabata*** $k = \gamma = C_p / C_v = c_p / c_v$, ***izocora*** $k \rightarrow \pm\infty$.

a) ***Reprezentați familia de politrope pentru câteva valori*** k ***caracteristice.*** **b)** ***Găsiți ecuația politropelor în celelalte perechi de coordonate*** $V - T$, $p - T$. **c)** ***Pentru un ciclu (parcurs de o masă de gaz ideal), format din două perechi de politrope :*** $pV^k = a_{1,2}$ ***și*** $pV^j = b_{1,2}$, ***arătați că*** $V_1V_3 = V_2V_4$, $p_1p_3 = p_2p_4$ ***și*** $T_1T_3 = T_2T_4$.

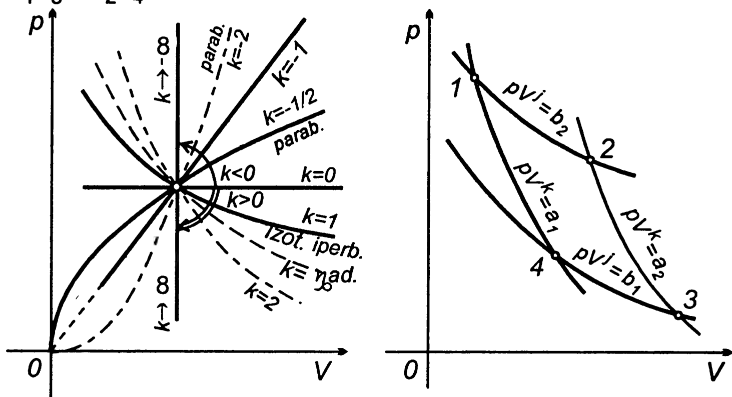


Fig.1.4.32

Rezolvare. a) V. figura pentru câteva valori particulare k.

b) $\text{const} = pV^k = pV \cdot V^{k-1} = \nu RT \cdot V^{k-1} \rightarrow TV^{k-1} = \text{const.}$ (1)

$const = pV^k = pV \cdot (\nu RT/p)^k \rightarrow p^{1-k}T^k = const.$ (2)

c) Pentru cele 4 puncte avem , respectiv :

$p_1V_1^k = a_1$, $p_1V_1^j = b_2 \rightarrow a_1/b_2 = V_1^{k-j}$, (3)

$p_2V_2^k = a_2$, $p_2V_2^j = b_2 \rightarrow a_2/b_2 = V_2^{k-j}$, (4)

$p_3V_3^k = a_2$, $p_3V_3^j = b_1 \rightarrow a_2/b_1 = V_3^{k-j}$, (5)

$p_4V_4^k = a_1$, $p_4V_4^j = b_1 \rightarrow a_1/b_1 = V_4^{k-j}$, (6)

Înmulțim membru cu membru ecuațiile (3), (5) între ele şi respectiv ecuațiile (4), (6) între ele :

$a_1a_2/(b_1b_2) = (V_1V_3)^{k-j}$, $a_2a_1/(b_2b_1) = (V_2V_4)^{k-j} \rightarrow V_1V_3 = V_2V_4$. (7)

Repetăm raționamentul, folosind ecuația politropelor sub forma $p^{1/k}V = const$: $p_1^{1/k}V_1/(p_1^{1/j}V_1) = a_1'/b_2' = p_1^{1/k-1/j}$,

$a_2'/b_2' = p_2^{1/k-1/j}$, $a_2'/b_1' = p_3^{1/k-1/j}$, $a_1'/b_1' = p_4^{1/k-1/j}$,

$a_1'a_2'/(b_1'b_2') = (p_1p_3)^{1/k-1/j}$, $a_2'a_1'/(b_2'b_1') = (p_2p_4)^{1/k-1/j} \rightarrow$

$p_1p_3 = p_2p_4$. (8)

Înmulțind relațiile (7) şi (8) între ele, obținem

$(V_1p_1)(V_3p_3) = (V_2p_2)(V_4p_4) \rightarrow T_1T_3 = T_2T_4$. (9)

În particular, dacă o pereche de politrope este formată din izocore, respectiv izobare , izoterme, atunci una din relațiile (7),(8),(9) devine banală, şi anume : (7), respectiv (8), respectiv (9).

1.4.33. ***Printr-o conductă de secțiune variabilă curge gaz în regim*** **staționar.** ***La intrare în conductă viteza gazului este*** v_1 = 2,9 m/s, ***aria secțiunii transversale*** S_1 = 0,102 m^2 , ***presiunea*** p_1 = =100 kPa ***şi temperatura*** T_1 = 290 K. ***La ieşirea din conductă aria secțiunii*** S_2 = 0,100 m^2 , ***presiunea*** p_2 = 102 kPa ***şi temperatura*** T_2 = 300 K. ***Aflați viteza*** v_2 .

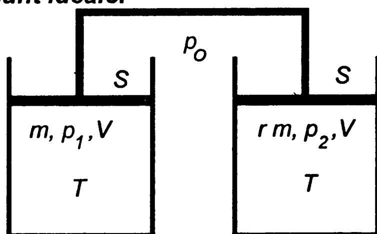
Rezolvare. În regim *staționar* de curgere este valabilă *legea* ***continuității*** : debitul *masic* este *acelaşi* de-a lungul conductei:

$\rho_1S_1v_1 = \rho_2S_2v_2$ sau $[\mu p_1/(RT_1)]\, S_1v_1 = [\mu p_2/(RT_2)]\, S_2v_2$, (1)

$v_2 = v_1 \cdot S_1p_1T_2/(S_2p_2T_1) = 3{,}0$ m/s . (2)

1.4.34. ***În dispozitivul din figură avem volume egale de gaz ideal, aflat inițial la aceeaşi temperatură, dar în cilindrul 2 masa este de*** r = 3,0 ori ***mai mare. Mărim presiunea exterioară de*** k = 1,50 ori. ***Pentru a menține volumele neschimbate în primul cilindru temperatura absolută a fost mărită de*** n_1 = 2,0 ori. ***De***

câte ori n_2 ***a fost mărită temperatura absolută în al doilea cilindru ? Pistoanele sunt ideale.***

Fig.1.4.34 

Rezolvare. Condiția de ***echilibru mecanic*** a pistoanelor cuplate, în cele două stări :

$2p_oS = p_1S + p_2S$, $\quad 2kp_oS = p_1'S + p_2'S$. (1)

Ecuația de stare pentru gazele din cei doi cilindri :

$p_1V = (m/\mu)RT$, $\ p_2V = (r\,m/\mu)RT \rightarrow \ p_2 = r\,p_1$; (2)

$p_1'V = (m/\mu)R \cdot n_1T = p_1V \cdot n_1 \rightarrow \ p_1' = n_1\,p_1$, (3)

$p_2'V = (r\,m/\mu)R \cdot n_2T = p_1V \cdot r\,n_2 \rightarrow \ p_2' = r\,n_2\,p_1$, (4)

Conform ecuației (1) :

$k = (p_1' + p_2') : (p_1 + p_2) = (n_1p_1 + r\,n_2p_1) : (p_1 + rp_1) =$

$= (n_1 + r\,n_2) : (1 + r)$, (5)

$n_2 = [k(r + 1) - n_1] : r = 2{,}0$. (6)

1.4.35. ***Într-un cilindru vertical închis, vidat, este suspendat de un resort un piston, care lunecă etanş fără frecări şi a cărui poziție de echilibru este chiar pe fundul cilindrului. Sub piston se introduce o masă de aer la temperatura*** $t_1 = 27^oC$, ***înălțimea la care urcă pistonul fiind*** $h_1 = 10$ cm. ***La ce înălțime*** h_2 ***va urca pistonul dacă cantitatea de aer o mărim de*** $n = 5{,}0$ ori, ***iar temperatura o creştem până la*** $t_2 = 37^oC$ ***?***

Rezolvare. Scriem condițiile de ***echilibru mecanic*** a pistonului (greutatea pistonului este echilibrată de forța elastică dată de deformația *inițială* a resortului) :

$p_1S = kh_1$, $\ p_2S = kh_2 \rightarrow \ p_1/p_2 = h_1/h_2$. (1)

Scriem ***ecuația de stare*** pentru gazul de sub piston :

$p_1 \cdot h_1S = (m/\mu)RT_1$, $p_2 \cdot h_2S = (n\,m/\mu)RT_2$, (2)

$p_2h_2/(p_1h_1) = n \cdot T_2/T_1$, $\quad$ dar $\ p_2/p_1 = h_2/h_1$, (3)

$(h_2/h_1)^2 = n \cdot T_2/T_1 \rightarrow \ h_2 = h_1\sqrt{nT_2/T_1} = 22{,}7$ cm. (4)

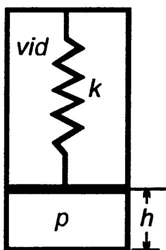


Fig.1.4.35

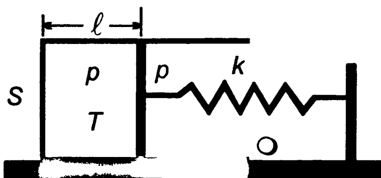


Fig.1.4.36

1.4.36. ***Un cilindru cu piston conține gaz la temperatura*** T ***și presiunea*** p ***egală cu presiunea atmosferică. Masa totală este*** M . ***Pistonul are secțiunea*** S ***și poate luneca etanș fără frecări, iar cilindrul are coeficientul de frecare*** μ ***cu planul orizontal. Lungimea cilindrului ocupată de gaz este*** ℓ . ***Pistonul este prins printr-un resort, de constantă*** k , ***inițial nedeformat, de un perete. De câte ori trebuie mărită temperatura*** T ***a gazului pentru ca volumul său să crească de*** n ***ori ?***

Rezolvare. Forța de frecare *maximă* este μMg când apare lunecarea.

a) Să presupunem întâi că cilindrul *nu lunecă*. Atunci masa de gaz suferă transformarea **generală** :

$$pS\ell/T = p'S\cdot n\ell/T' \rightarrow T'/T = n\cdot p'/p. \qquad (1)$$

Pe de altă parte, condiția de *echilibru* **mecanic** a pistonului este :

$$p'S = pS + k(n\ell - \ell) \rightarrow p' = p + k\ell(n-1)/S. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă

$$T'/T = n\cdot[1 + (n-1)k\ell/(pS)]. \qquad (3)$$

Pentru a nu luneca forța cu care este împins cilindrul trebuie să fie mai mică decât forța de frecare statică (de aderența) *maximă* :

$$k(n\ell - \ell) < \mu Mg. \qquad (4)$$

b) Dacă condiția (4) nu este îndeplinită, deci dacă $k(n\ell - \ell) > \mu Mg$, atunci cilindrul la început nu va luneca și va începe să lunece la o lungime a coloanei de aer ℓ_1 :

$$k(\ell_1 - \ell) = \mu Mg. \qquad (5)$$

În acest moment condiția de echilibru a pistonului este

$$p_1 S = pS + k(\ell_1 - \ell). \qquad (6)$$

Din (5) , (6) rezultă $\quad (p_1 - p)S = \mu Mg. \qquad (7)$

Până în momentul începerii lunecării transformarea este **generală**:

$p S \ell / T = p_1 S \ell_1 / T_1 \rightarrow T_1 / T = p_1 \ell_1 / (p \ell) =$

$= [(p + \mu Mg / S) : p] \cdot [(\ell + \mu Mg / k) : \ell]$. (8)

Din momentul lunecării presiunea rămâne *constantă*, fiindcă la orice tendință de creştere a presiunii (prin încălzire) cilindrul va luneca la stânga. Deci mai departe avem o transformare *izobară* :

$T' / T_1 = S \cdot n \ell / (S \ell_1) = n \ell : (\ell + \mu Mg / k)$. (9)

Raportul final al temperaturilor :

$T' / T = (T' / T_1) \cdot (T_1 / T) = n \cdot (p + \mu Mg / S) : p$. (10)

1.4.37. ***Într-un cilindru orizontal lunecă etanş fără frecări*** n **- 1** ***pistoane care împart cilindrul în*** n ***compartimente conținând gaze respectiv cu masele*** m_1, m_2, ... , ***masele molare*** μ_1, μ_2, ... ***şi temperaturile*** T_1, T_2, ... ***Aflați în ce rapoarte sunt*** **volumele .**

Rezolvare. La echilibru presiunea peste tot trebuie să fie *aceeaşi*. Ecuațiile de stare pentru fiecare compartiment sunt

$pV_i = (m_i / \mu_i)RT_i \rightarrow V_1 : V_2 : ... = (m_1 T_1 / \mu_1) : (m_2 T_2 / \mu_2) : ...$

1.4.38. ***Într-un cilindru vertical închis se află două pistoane care se pot mişca etanş fără frecări. În fiecare compartiment se află acelaşi număr de moli de gaz ideal. La o anumită temperatură avem*** $V_1 : V_2 : V_3 = 5 : 3 : 1$. ***Mărind temperatura obținem*** $V_1' : V_2' : V_3' = x : 2 : 1$. ***Aflați*** x ***şi de câte ori a crescut temperatura absolută .***

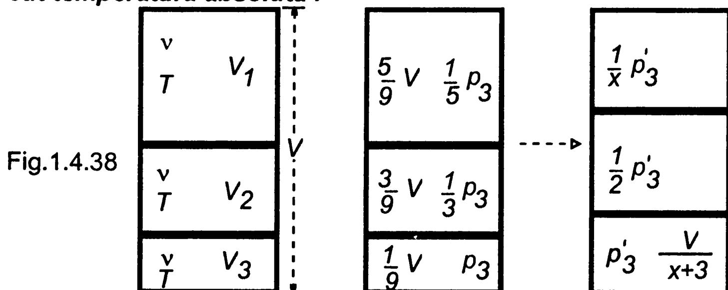


Fig.1.4.38

Rezolvare. Conform ecuațiilor de stare :

$p_i = \nu RT / V_i \rightarrow p_1 : p_2 : p_3 = (1/V_1) : (1/V_2) : (1/V_3) = (1/5) : (1/3) : (1/1)$; (1)

$p_1' : p_2' : p_3' = (1/ V_1') : (1/ V_2') : (1/ V_3') = (1 / x) : (1/2) : (1/1)$. (2)

Observăm acum că diferența de presiune de o parte şi de alta a unui piston trebuie să fie egală cu presiunea exercitată de piston datorită greutății sale, deci putem scrie:

$p_3 - p_3/3 = p_3' - p_3'/2 \rightarrow \; p_3' = 4p_3/3$, (3)

$p_3/3 - p_3/5 = p_3'/2 - p_3'/x = (1/2 - 1/x)\,4p_3/3 \rightarrow$

$1/3 - 1/5 = (1/2 - 1/x)\,4/3 \;\rightarrow\; x = 5/2$. (4)

În sfârşit *ecuațiile de stare* ne dau :

$p_3 \cdot V/9 = \nu RT, \quad p_3' \cdot V/(x+3) = \nu RT$, (5)

$T'/T = [3/(x+3)] \cdot p_3'/p_3 = [9/(x+3)] \cdot 4/3 = 24/11$. (6)

1.4.39. ***În montajul din figură lungimea cilindrului*** L = 80 cm , ***iar pistonul se mişcă etanş fără frecări. La temperatura*** T_1 = 300 K , x_1 = 40 cm , ***iar la*** T_2 = 500 K , x_2 = 50 cm . ***Care este lungimea*** ℓ_o ***a resortului nedeformat ? Ce valoare are*** x ***la temperatura heliului lichid ?***

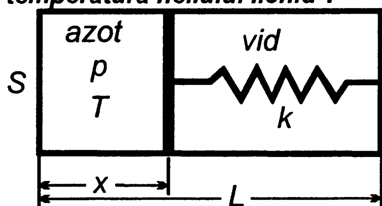


Fig.1.4.39

Rezolvare. Presiunea la care se găseşte gazul este dată de forța elastică a resortului comprimat :

$$p = k\,[\ell_o - (L - x)] : S .$$ (1)

Scriem ***ecuația de stare*** pentru cele două stări :

$[k\,(\ell_o - L + x_1)/S] \cdot Sx_1 = \nu RT_1, \quad [k\,(\ell_o - L + x_2)/S] \cdot Sx_2 = \nu RT_2$, (2)

Prin împărțirea ecuațiilor membru la membru, obținem

$(\ell_o - L + x_1) : (\ell_o - L + x_2) = (T_1/T_2)\,(x_2/x_1) \rightarrow$

$\rightarrow \; \ell_o = [(L - x_1)x_1T_2 - (L - x_2)x_2T_1] : (x_1T_2 - x_2T_1) = 70$ cm. (3)

La temperatura heliului lichid azotul *îngheață* şi ocupă un volum *neglijabil*, iar vaporii săi saturanți au o presiune *neglijabilă*, de aceea, practic, resortul va rămâne *nedeformat* :

$$x = L - \ell_o = 10 \text{ cm} .$$ (4)

1.4.40. ***Un balon de volum*** V = 100 L ***este umplut cu un gaz la presiunea*** p = 110,5 kPa ***şi temperatura*** t_1 = 27°C . ***Încălzind balonul până la*** t_2 = 127°C ***masa sa a scăzut cu*** m = = 27,3 g ***din cauză că a ieşit gaz afară printr-o supapă. Aflați densitatea gazului în condiții* normale.**

Rezolvare. Scriem *ecuația de stare* pentru cele două situații :

$pV = (m_1 / \mu)RT_1$, $pV = [(m_1 - m) / \mu]RT_2$ $\rightarrow$ (1)

$\mu = [mR / (pV)] \cdot T_1 T_2 / (T_2 - T_1)$. (2)

Dar *densitatea* este dată de formula cunoscută :

$\rho_0 = \mu\, p_0 / (RT_0) = [p_0 / (RT_0)]\, [mR / (pV)] \cdot T_1 T_2 / (T_2 - T_1) =$

$= (m / V)\, (p_0 / p) \cdot T_1 T_2 / [T_0\, (T_2 - T_1)\,] = 1{,}1$ kg/m^3 . (3)

1.4.41. ***Un balon de volum*** V = 1,00 L ***este vidat la temperatura ambiantă constantă, astfel încât presiunea gazului scade cu*** Δp = 78 kPa , ***iar masa balonului cu gaz scade cu*** Δm = 1,00 g. ***Aflaţi densitatea gazului la presiunea*** **normală** ***şi la temperatura ambiantă .***

Rezolvare. Scriem *ecuaţia de stare* pentru cele două situaţii :

$pV = (m / \mu)RT$, $(p - \Delta p)V = [(m - \Delta m) / \mu]RT$ $\rightarrow$ (1)

$\Delta p \cdot V = (\Delta m / \mu)RT$, $\mu / (RT\,) = \Delta m / (V \cdot \Delta p)$. (2)

Dar *densitatea* este dată de formula cunoscută :

$\rho = \mu\, p_0 / (RT) = (\Delta m / V) \cdot p_0 / \Delta p = 1{,}3$ kg/m^3 . (3)

1.4.42. ***O cantitate de plută şi o cantitate de plumb cântăresc în aer la fel :*** G = 1000 N . ***Care este diferenţa de*** **masă** ***dintre plută şi plumb, dacă temperatura aerului este*** t = 27^{o}C **şi presiunea** p = 100 kPa *?*

Rezolvare. Greutatea (aparentă a) unui corp cântărit în aer (ţinând seama de forţa arhimedică):

$G = mg - F_A = mg(1 - \rho_{aer} / \rho_{corp})$, (1)

$m = (G / g)\, [1 : (1 - \rho_{aer} / \rho_{corp})]\, (G / g)\, (1 + \rho_{aer} / \rho_{corp})$, (2)

deoarece $\rho_{aer} \ll \rho_{corp}$. Diferenţa de masă va fi în cazul nostru :

$\Delta m \approx (G / g)\, \rho_{aer}\, (1/ \rho_1 - 1/ \rho_2) = (G / g)\, \rho_{aer}\, (\rho_2 - \rho_1) : (\, \rho_1\, \rho_2)$. (3)

Densitatea aerului se poate calcula în două moduri :

$\rho_{aer} = \mu_{aer}\, p / (RT) = 1{,}17$ kg/m^3 (4)

sau cu formula

$\rho_{aer} = \rho_0 \cdot pT_0 / (p_0 T)$, unde $\rho_0 = 1{,}293$ kg/m^3 . (5)

Prin urmare,

$\Delta m \approx (G / g)\, \rho_{aer}\, (\rho_2 - \rho_1) : (\, \rho_1\, \rho_2) = 0{,}53$ kg . (6)

1.4.43. ***Un corp este cântărit cu un dinamometru în aer la presiunea*** H = 100 kPa ***şi temperatura*** t = 27^{o}C . ***Când temperatura aerului a crescut cu*** Δ_1T = 10 K, ***greutatea (aparentă a) corpului a crescut cu*** ΔG = 10 mN. ***Cu cât se schimbă greuta-***

tea corpului dacă temperatura creşte cu $\Delta_2 T = 15$ K, ***iar presiunea creşte cu*** $\Delta H = 5{,}0$ kPa ***?***

Rezolvare. Greutatea (aparentă a) unui corp cântărit în aer este (neglijăm variația densității corpului):

$$G = mg - \rho_{aer} \cdot V_{corp} \cdot g \rightarrow \Delta G = - V_{corp}\ g\, \Delta\rho_{aer} . \quad (1)$$

Dar densitatea gazelor este dată de formula cunoscută :

$$\rho = \mu\, p / (RT) . \quad (2)$$

Atunci pentru cele două cântăriri avem :

$$\Delta_1 G = - V_{corp}\ g \{ \mu H : [R(T + \Delta_1 T)] - \mu H : (RT) \} =$$

$$= V_{corp}\ g (\mu H / R) \cdot \Delta_1 T : [T(T + \Delta_1 T)] ; \quad (3)$$

$$\Delta_2 G = V_{corp}\ g (\mu / R) [H / T - (H + \Delta H) : (T + \Delta_2 T)] =$$

$$= V_{corp}\ g (\mu / R) (H \Delta_2 T - T \Delta H) : [T(T + \Delta_2 T)] ; \quad (4)$$

$$\Delta_2 G = \Delta_1 G \cdot [(T + \Delta_1 T) : (T + \Delta_2 T)] \cdot (H \Delta_2 T - T \Delta H) : (H \Delta_1 T) = 0. \quad (5)$$

1.4.44. ***Un corp se află în aer în condiții* normale. *Scăzând presiunea la*** $p_1 = 100$ kPa ***şi mărind temperatura aerului la*** $t_1 = 60^oC$, ***greutatea aparentă a corpului creşte cu*** $\Delta G_1 = 20$ mN . ***Cu cât se schimbă greutatea corpului dacă mărim temperatura la*** $t_2 = 50^oC$ ***şi presiunea la*** $p_2 = 800$ torr *?*

Rezolvare. Greutatea aparentă în cele 3 cazuri se scrie :

$$G_o = mg - \rho_o Vg , \quad G_1 = mg - \rho_1 Vg = mg - \rho_o [p_1 T_o / (p_o T_1)]\, Vg ,$$

$$G_2 = mg - \rho_2 Vg = mg - \rho_o [p_2 T_o / (p_o T_2)]\, Vg , \quad (1)$$

De aici rezultă creşterile de greutate :

$$\Delta G_1 = \rho_o Vg [1 - p_1 T_o / (p_o T_1)], \quad \Delta G_2 = \rho_o Vg [1 - p_2 T_o / (p_o T_2)] =$$

$$= \Delta G_1 \cdot [1 - p_2 T_o / (p_o T_2)] : [1 - p_1 T_o / (p_o T_1)] = 60 \text{ mN} . \quad (2)$$

1.4.45. ***Un balon de volum*** $V = 7{,}8$ m^3 ***este prins de un fir. Cu cât se schimbă* tensiunea *din fir dacă temperatura aerului coboară de la*** $t_1 = 27^oC$ ***la*** $t_2 = - 13^oC$ ***şi presiunea atmosferică scade de la*** $H_1 = 100$ kPa ***la*** $H_2 = 98$ kPa ***?***

Rezolvare. Tensiunea din fir trebuie să echilibreze forța ascensională :

$$F = \rho Vg - mg , \ \Delta F = Vg\, \Delta\rho = Vg [\mu H_2 / (RT_2) - \mu H_1 / (RT_1)] =$$

$$= Vg \cdot (\mu / R) (H_2 / T_2 - H_1 / T_1) = 11{,}6 \text{ N} .$$

1.4.46. ***Într-un tub barometric a intrat puțin aer la temperatura*** $t = 17^oC$ ***şi presiunea atmosferică*** $H = 101{,}6$ kPa . ***Lungi-***

mea coloanei de mercur fiind h = 50 cm. ***Care este densitatea aerului din camera barometrică ?***

Rezolvare. Presiunea atmosferică H echilibrează presiunea aerului p din camera barometrică plus presiunea *hidrostatică* a coloanei de mercur ρgh :

$$H = p + \rho gh \rightarrow p = H - \rho gh. \qquad (1)$$

Aplicăm formula cunoscută a *densității* gazelor:

$$\rho_{aer} = \mu\, p / (RT) = \mu\, (H - \rho gh) / (RT) = 0{,}42 \text{ kg/m}^3 . \qquad (2)$$

1.4.47. ***În camera barometrică a fost introdusă o cantitate de gaz, astfel încât lungimea coloanei de mercur a devenit*** h = = 60 cm. ***Introducând încă o cantitate*** **egală** ***de gaz, coloana de mercur a coborît cu*** Δh = 15 cm. ***Aflați presiunea atmosferică.***

Rezolvare. Presiunea atmosferică H echilibrează presiunea *hidrostatică* a coloanei de mercur, ρgh , plus presiunea gazului din camera barometrică: $H = \rho gh + p$. Scriem **ecuația de stare** pentru gaz în cele două cazuri:

$$(H - \rho gh) \cdot \ell S = \nu RT , \quad [H - \rho g(h - \Delta h)] \cdot (\ell + \Delta h)S = 2\nu RT. \qquad (1)$$

Împărțim ecuația a doua la prima :

$$\{ [H - \rho g(h - \Delta h)] : (H - \rho gh) \} \cdot (\ell + \Delta h) : \ell = 2$$

$$\rightarrow H = \rho g(h + \Delta h) = 100 \text{ kPa} . \qquad (2)$$

* * **1.4.48.** ***Calculați masa de aer de volum*** V = 86 L , ***cuprinsă între geamurile unei ferestre. Presupunem că temperatura variază liniar de la*** t_1 = - 23°C ***(afară) până la*** t_2 = 27°C ***în cameră, iar presiunea este*** **normală.** ***La ce distanță de geamul exterior un plan paralel separă mase egale de aer de o parte şi de alta?***

Rezolvare. $T = T_1 + ax$, dar pentru $x = b$ avem $T = T_2$, deci $T_2 = T_1 + a \cdot b$, de unde constanta a : $\quad a = (T_2 - T_1) : b. \qquad (1)$

Să considerăm un strat *infinit de subțire*, de grosime dx, aflat la distanța x de afară. Atunci masa de aer *elementară* cuprinsă în acest volum *elementar* :

$$dm = \rho dV = [\, \mu p / (RT)]\, S dx = \{\, \mu p / [R(T_1 + ax)] \,\}\, S dx . \qquad (2)$$

Prin integrare nedefinită :

$$m(x) = \int dm = \int \frac{\mu p S dx}{R(T_1 + ax)} = \frac{\mu p S}{Ra}\left[\ln(T_1 + ax) + C\right], \qquad (3)$$

unde constanta de integrare se determină din *condiția* ***la margine***:

pentru $x = 0$, avem $m(0) = 0$; $0 = \ln T_1 + C$,

$C = - \ln T_1 = \ln(1 / T_1)$, deci

$$m(x)=\frac{\mu pS}{Ra}\ln\frac{T+ax}{T_1}=\frac{\mu pSb}{R(T_2-T_1)}\ln\left(1+\frac{T_2-T_1}{T_1}\frac{x}{b}\right)=$$

$$=\frac{\mu pV}{R(T_2-T_1)}\ln\left(1+\frac{T_2-T_1}{T_1}\frac{x}{b}\right). \qquad (4)$$

Se poate integra şi *definit* (limitele de integrare se corespund):

$$m(x)=\int_0^x \mathrm{d}m(x)=\int_0^x \frac{\mu pS\mathrm{d}x}{R(T_1+ax)}=\frac{\mu pS}{Ra}\int_0^x\frac{a\mathrm{d}x}{T_1+ax}=$$

$$=\frac{\mu pS}{Ra}\ln\frac{T_1+ax}{T_1}=\frac{\mu pV}{R(T_2-T_1)}\ln\left(1+\frac{T_2-T_1}{T_1}\frac{x}{b}\right).$$

Masa totală se obţine imediat punând $x = b$:

$m = \{ \mu pV : [R(T_2 - T_1) \} \ln(T_2 / T_1) = 106$ g . (5)

Calculul cu temperatura *medie* (aritmetică) dă în cazul nostru, practic, acelaşi rezultat:

$m = 2\ \mu pV : [R(T_2 - T_1)] = 105$ g . (6)

Distanţa cerută se obţine din condiţia : $m(\delta) = m / 2$ sau

$\{ \mu pV : [R(T_2 - T_1) \} \ln \{1 + [(T_2 - T_1) / T_1] \cdot \delta / b \} =$

$= (1/2) \{ \mu pV : [R(T_2 - T_1) \} \ln (T_2 / T_1)$,

de unde

$$\delta=b\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}}=\frac{b}{1+\sqrt{T_2/T_1}}=0{,}477\ b. \qquad (7)$$

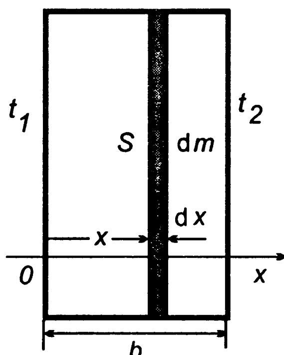


Fig.1.4.48

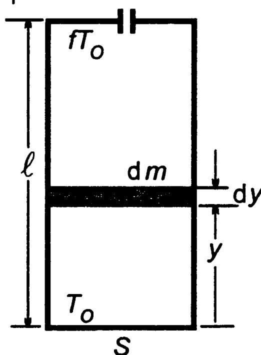


Fig.1.4.49

* * **1.4.49.** ***Un cilindru vertical de lungime*** ℓ = 100 cm , ***având un mic orificiu de comunicare cu atmosfera, conține la temperatura*** T_0 ***o masă*** m_0 =10,0 g ***de aer. Datorită unui radiator electric cilindrul se încălzeşte astfel încât temperatura lui creşte liniar de la*** T_0 ***la baza cilindrului până la*** $T' = f\,T_0$, $f = 2{,}00$, ***la vârf. Aflați masa de aer din cilindru şi înălțimea la care se află CM (centrul de masă) al acestei mase de aer. La ce înălțime un plan orizontal separă mase egale de aer de o parte şi de alta ?***

Rezolvare. $T = T_0 + ay$, unde constanta a se determină din condiția ca pentru $y = \ell$ să avem $T' = f\,T_0$:

$$T' = f\,T_0 = T_0 + a\ell\text{ , de unde } a = (T' - T_0)/\ell = (f-1)T_0/\ell\,. \qquad (1)$$

Masa inițială :

$$m_0 = \mu p V/(RT_0) = \mu\, pS\ell/(RT_0)\,. \qquad (2)$$

Să considerăm un strat orizontal *infinit de subțire* de grosime dy aflat la înălțimea y . Masa sa :

$$dm = \rho dV = [\,\mu p/(RT)]S dy = \{\,\mu p\,S/[R(T_0 + ay)]\,\}dy \qquad (3)$$

Prin integrare definită (limitele de integrare se corespund):

$$m(y) = \int_0^y dm(y) = \int_0^y \frac{\mu p S dy}{R(T_0 + ay)} = \frac{\mu p S}{Ra}\int_0^y \frac{a dy}{T_0 + ay} =$$

$$= [\,\mu p S/(Ra)]\ln[(T_0 + ay)/T_0] =$$

$$= \{\,\mu p S\ell/[R(T' - T_0)]\}\ln\{1 + [(T' - T_0)/T_0]\cdot y/\ell\,\} =$$

$$= [m_0/(T'/T - 1)]\ln\{1 + [(T' - T_0)/T_0]\cdot y/\ell\,\} =$$

$$= [m_0/(f-1)]\ln[1 + (f-1)\cdot y/\ell\,]\,. \qquad (4)$$

Se poate integra şi nedefinit :

$$\int dm = m(y) = \int \frac{\mu p S dy}{R(T_0 + ay)} = \frac{\mu p S}{Ra}\left[\ln(T_0 + ay) + C\right],$$

unde constanta de integrare se determină din *condiția la margine:* pentru $y = 0$ avem $m(0) = 0$, deci $0 = \ln T_0 + C$, $C = -\ln T_0$, etc.

Masa totală se obține punând $y = \ell$:

$$m = [m_0/(f-1)]\ln f = 6{,}93\text{ g}\,. \qquad (5)$$

Coordonata CM este prin definiție :

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\int y dm = \frac{1}{m}\int_0^\ell y\rho S dy = \frac{1}{m}\int_0^\ell \frac{\mu p S}{RT} y dy = \frac{\mu p S}{mRa}\int_0^\ell \frac{a y dy}{T_0 + ay}.$$

Integrala se calculează astfel :

$$\int_0^{\ell} \frac{(ay + T_0 - T_0)\mathrm{d}y}{T_0 + ay} = \int_0^{\ell} \mathrm{d}y - T_0 \int_0^{\ell} \frac{\mathrm{d}y}{T_0 + ay} =$$

$$= \ell - (T_o / a) \ln [(T_o + a\ell) / T_o] = \ell - [\ell / (f - 1) \ln f .$$

Rezultă atunci :

$$y_{cm} = \ell \cdot \{m_o / [m(f - 1)]\} [1 - (\ln f) : (f - 1)] =$$

$$= \ell \cdot [1 / \ln f - 1 / (f - 1)] = 44 \text{ cm} . \qquad (6)$$

Înălțimea h la care un plan orizontal împarte cilindrul în două jumătăți cu mase egale de aer se obține din condiția: $m(h) = m / 2$

sau $\quad [m_o / (f - 1)] \ln [1 + (f - 1) \cdot h / l] = m_o / 2$,

de unde

$$h = [\ell / (f - 1)] \left(e^{(f-1)/2} - 1 \right) = 0{,}65 \text{ m} . \qquad (7)$$

* * *

1.5. Amestecuri de gaze

1.5.1. ***Densitatea unui amestec de*** He ***şi*** N_2 ***la temperatura*** $t = 27^oC$ ***şi presiunea*** $p = 100$ kPa ***este*** $\rho = 1{,}00$ kg/m^3. ***Aflaţi : a) Concentraţia atomilor de*** He ***şi a moleculelor de*** N_2. **b)** ***Presiunile parţiale şi fracţiunile molare.***

Rezolvare. a) Fie $m_{1,2} = \mu_{1,2} / N_A$ masele moleculelor respective. Atunci masa unităţii de volum = densitatea se exprimă cu ajutorul concentraţiilor astfel :

$$\rho = n_1 m_1 + n_2 m_2 = (n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2) / N_A \ . \qquad (1)$$

Pe de altă parte, presiunea se exprimă cu ajutorul concentraţiilor :

$$p = n_1 kT + n_2 kT = (n_1 + n_2)\, RT / N_A \ . \qquad (2)$$

Din aceste două ecuaţii rezultă :

$$n_1 = [1 / (\mu_2 - \mu_1)]\, [\mu_2 p / (RT) - \rho]\, N_A = 3{,}0 \cdot 10^{24}\ \text{m}^{-3} ,$$

$$n_2 = [1 / (\mu_2 - \mu_1)]\, [\rho - \mu_1 p / (RT)]\, N_A = 1{,}0 \cdot 10^{24}\ \text{m}^{-3} . \qquad (3)$$

b) Presiunile **parţiale** sunt :

$$p_{1,2} = n_{1,2}\, kT \qquad \text{dar} \qquad p = (n_1 + n_2)\, kT, \qquad (4)$$

$$p_1 = p \cdot n_1 / (n_1 + n_2) = 75\ \text{kPa} ,\ \ p_2 = p \cdot n_2 / (n_1 + n_2) = 25\ \text{kPa}. \qquad (5)$$

Ştiind că numărul de molecule $N = \nu N_A$, $N = nV$, fracţiunile molare sunt:

$$x_1 = \nu_1 / (\nu_1 + \nu_2) = N_1 / (N_1 + N_2) = n_1 / (n_1 + n_2) = 0{,}75 ,$$

$$x_2 = \nu_2 / (\nu_1 + \nu_2) = N_2 / (N_1 + N_2) = n_2 / (n_1 + n_2) = 0{,}25 , \qquad (6)$$

1.5.2. ***Densităţile a două gaze la o anumită temperatură şi presiune sunt respectiv*** $\rho_1 = 1{,}20$ kg/m^3 , $\rho_2 = 0{,}80$ kg/m^3 . ***Se amestecă mase egale din cele două gaze. Care va fi densitatea amestecului la aceeaşi temperatură şi presiune ?***

Rezolvare. Densităţile date se scriu :

$$\rho_1 = \mu_1 p / (RT) \ , \qquad \rho_2 = \mu_2 p / (RT) \ . \qquad (1)$$

Pe de altă parte, **ecuaţia de stare** pentru amestec este

$$pV = (m / \mu_1 + m / \mu_2) RT \ \rightarrow\ m = [pV / (RT)]\, [(1 / \mu_1 + 1 / \mu_2)] \ . \qquad (2)$$

Dar densitatea amestecului este

$$\rho = 2m / V = 2[p / (RT)]\, [(1 / \mu_1 + 1 / \mu_2)] =$$

$$= 2 : [RT / (\mu_1 p) + RT / (\mu_2 p)] =$$

$= 2 : (1/\rho_1 + 1/\rho_2) = 2\rho_1\rho_2/(\rho_1 + \rho_2) = 0{,}96\ kg/m^3$. (3)

1.5.3. ***Densitatea aerului în condiții normale este*** $\rho_o = 1{,}293$ kg/m^3. ***Considerând aerul format numai din*** O_2 ***și*** N_2 ***(celelalte gaze sunt în cantități neglijabile), aflați compoziția masică și volumică (fracțiunile molare) a aerului.***

Rezolvare. Fie fracțiunile *masice* $g_{1,2} = m_{1,2}/m$, atunci putem scrie pentru presiunea aerului :

$$p = (m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)RT/V = (g_1 m/\mu_1 + g_2 m/\mu_2)RT/V =$$

$$= \rho(g_1/\mu_1 + g_2/\mu_2)RT, \quad (1)$$

dar $g_1 + g_2 = 1$, atunci rezultă :

$$g_1 = [\mu_1/(\mu_1 - \mu_2)][1 - \mu_2 p/(\rho RT)] = 26\ \%, \quad (2)$$

$$g_2 = [\mu_2/(\mu_1 - \mu_2)][\mu_1 p/(\rho RT) - 1] = 74\ \%, \quad (3)$$

Fracțiunile *volumice* coincid la gaze cu fracțiunile *molare* :

$$r_i = V_i/V = (V_i/V_\mu) : (V/V_\mu) = \nu_i/\nu = \nu_i/\Sigma\nu_k = x_i . \quad (4)$$

Pe de altă parte,

$$x_i = \nu_i/\nu = (m_i/\mu_i) : (m/\mu_a) = (g_i/\mu_i) : (\Sigma g_k/\mu_k) . \quad (5)$$

În cazul problemei :

$$x_1 = (g_1/\mu_1) : (g_1/\mu_1 + g_2/\mu_2) = r_1 = 23{,}5\ \%,$$

$$x_2 = (g_2/\mu_2) : (g_1/\mu_1 + g_2/\mu_2) = r_2 = 76{,}5\ \% . \quad (6)$$

1.5.4. ***Două baloane identice conțin la temperatura*** T = 300 K, ***respectiv*** O_2 ***la presiunea*** $p_1 = 70$ kPa ***și*** He ***la*** $p_2 = 250$ kPa ***Se pompează tot heliul din al doilea balon în primul. Ce densitate va avea amestecul din primul balon (la aceeași temperatură) ?***

Rezolvare. Scriem *ecuația de stare* pentru fiecare balon în starea inițială :

$$p_1 V = (m_1/\mu_1)RT, \qquad p_2 V = (m_2/\mu_2)RT. \quad (1)$$

Atunci **densitatea** amestecului va fi

$$\rho = (m_1 + m_2)/V = \mu_1 p_1/(RT) + \mu_2 p_2/(RT) =$$

$$= [1/(RT)](\mu_1 p_1 + \mu_2 p_2) = 1{,}30\ kg/m^3 . \quad (2)$$

1.5.5. ***Două vase diferite conțin câte o masă egală din același gaz la presiunea*** $p_1 = 40$ kPa , ***respectiv*** $p_2 = 60$ kPa . ***Ce presiune se va stabili în vase dacă le unim printr-un mic tub ? Temperatura este constantă. Dar în cazul general când sunt*** n ***vase diferite care conțin câte o masă egală din același gaz la presiunile*** p_i ***?***

Rezolvare. În starea finală presiunea în toate vasele va fi aceeaşi p', atunci

$$p_i V_i = (m/\mu)RT \rightarrow V_i = mRT/(\mu p_i), \quad (1)$$

$$p'\Sigma V_i = (n\,m/\mu)RT = p'\Sigma[mRT/(\mu p_i)], \quad p' = n : \Sigma(1/p_i). \quad (2)$$

Pentru cele două vase :

$$p' = 2 : (1/p_1 + 1/p_2) = 2\,p_1\,p_2 : (p_1 + p_2) = 48 \text{ kPa}. \quad (3)$$

1.5.6. ***Un număr*** n ***de vase de volume*** V_i, i = 1, 2, ...,n, ***conțin gaze diferite la presiunile*** p_i ***şi la aceeaşi temperatură. Ce presiune rezultantă se stabileşte dacă unim vasele între ele ?***

Rezolvare. Numărul de particule sau numărul de moli într-un gaz este determinat de parametrii *p, V, T* şi nu depinde de natura lor:

$$\nu = pV/(RT)\ , \quad N = \nu N_A = pV/(kT)\ , \quad (1)$$

de aceea la amestecarea gazelor - dacă nu se produc reacții chimice între gaze care pot duce la schimbarea numărului de molecule - putem scrie ***conservarea*** *numărului de particule sau numărului de moli (sau a raportului pV / T)*:

$$\Sigma\nu_i = \nu \quad \text{sau} \quad \Sigma\,[p_i V_i/(RT)] = p'\,[1/(RT)]\,\Sigma V_k$$

$$p' = \Sigma\,(p_i V_i)/\Sigma V_k. \quad (2)$$

1.5.7. ***În*** n ***vase diferite se află respectiv masele*** m_i ,i = 1, 2, ..., n , ***de gaze diferite cu masele molare*** μ_i, ***la presiunile*** p_i ***şi la aceeaşi temperatură. Ce presiune se stabileşte în vase dacă le unim ?***

Rezolvare. $p_i V_i = \nu_i RT \rightarrow V_i = \nu_i RT/p_i\ ,\ i = 1,..., n.$ (1)

$$p'\Sigma\, V_i = \Sigma\,\nu_k RT\ , \quad p'\cdot\Sigma\,(\nu_i RT/p_i) = \Sigma(\nu_k RT), \quad (2)$$

$$p' = (\Sigma\,\nu_k) : [\Sigma(\nu_i/p_i)] = [\Sigma(m_k/\mu_k)] : \{\Sigma[m_i/(\mu_i\,p_i)]\}. \quad (3)$$

1.5.8. ***Un număr*** n ***de vase cu volumele*** V_i, i = 1,...,n, ***con-țin gaze diferite la presiunile*** p_i. ***Vasele sunt termostatate la temperaturile*** T_i. ***Ce presiune finală de echilibru se stabileşte în vase dacă le unim ?***

Rezolvare. Scriem *conservarea numărului de moli*:

$$\Sigma\nu_i = \nu \quad \text{sau} \quad \Sigma\,[p_i V_i/(RT)] = \Sigma[p' V_k/(RT_k)]\ , \quad (1)$$

$$p' = [\Sigma\,(p_i V_i/T_i)] : [\Sigma\,(V_k/T_k)]\ . \quad (2)$$

1.5.9. ***În*** n ***vase de volume egale se află gaze diferite la temperaturile*** T_i, i = 1,...,n, ***şi presiunile*** p_i. ***Vasele sunt puse***

în legătură între ele şi încălzite până la temperaturile T_i' ***. Aflaţi presiunea finală la echilibru .***

Rezolvare. Scriem *conservarea numărului de moli* :

$\Sigma[p_i V/(RT_i)] = \Sigma[p'V/(RT_k')] \rightarrow p' = [\Sigma(p_i/T_i)] : [\Sigma(1/T_k')]$. (1)

În particular, dacă temperatura finală este unică T' :

$p' = (T'/n)\,\Sigma(p_i/T_i)$. (2)

1.5.10. ***Un număr de*** n ***vase de volume*** V_i , i = 1,..., n, ***care comunică între ele, conţin gaz la temperatura*** T ***şi presiunea*** p. ***Cât devine presiunea dacă termostatăm vasele respectiv la temperaturile*** T_i , i = 1,...,n ***?***

Rezolvare. Scriem *conservarea numărului de moli*:

$\Sigma[pV_i/(RT)] = \Sigma[p'V_k/(RT_k)] \rightarrow p' = (p/T)\cdot(\Sigma V_i) : [\Sigma\,(V_k/T_k)]$.

1.5.11. ***Un vas de volum*** V_1 = 3,0 L ***conţinând gaz la temperatura*** t = 17°C ***şi presiunea* normală*, este legat printr-un tub scurt cu un alt vas de volum*** V_2 = 7,0 L **vidat*. În tubul de legătură există un* ventil *care permite trecerea gazului din vasul* 1 *în vasul* 2 *dacă presiunea din* 1 *depăşeşte presiunea din* 2 *cu*** Δp = 39,7 kPa. ***Aflaţi presiunea din vasul 2 dacă ambele vase sunt încălzite până la*** t ' = 127°C .

Rezolvare. Presiunile finale trebuie să satisfacă condiţia impusă de ventil: $p_1' - p_2' = \Delta p$ .Scriem *conservarea numărului de moli* : $\nu_1 + 0 = \nu_1' + \nu_2'$ sau

$p_o V_1/(RT) = (p_2' + \Delta p)V_1/(RT') + p_2' V_2/(RT')$, (1)

$p_2' = [V_1/(V_1 + V_2)]\,(p_o\,T'/T - \Delta p) = 30$ kPa . (2)

1.5.12. ***Într-un vas de volum*** V = 8,31 L ***s-a introdus iniţial oxigen de masă*** m_1 = 3,2 g , ***apoi o masă*** m_2 = 4,4 g ***de*** CO_2 . ***Aflaţi presiunea finală după comprimarea amestecului la volumul*** V / n , n = 3,0 ***şi încălzirea amestecului până la temperatura*** T = 300 K.

Rezolvare. Scriem *ecuaţia de stare* pentru amestec în starea finală : $p'\cdot V/n = (m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)RT$,

$p' = (nRT/V)(m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2) = 180$ kPa.

1.5.13. ***Un vas de volum*** V = 2,00 L ***este împărţit în două compartimente egale ,*** A ***şi*** B, ***printr-o membrană semipermeabilă. În compartimentul*** A ***se introduc*** m_1 = 0,20 g H_2 ***şi***

$m_2 = 0{,}70$ g N_2, ***iar în celălalt compartiment se face*** **vid. *Încălzind sistemul până la temperatura*** $T = 500$ K, ***membrana devine permeabilă pentru*** H_2. ***Care va fi presiunea finală în compartimente?***

Rezolvare. La temperatura T hidrogenul va ocupa *uniform* întregul volum, deci jumătate din numărul de moli de H_2 vor trece în vasul B:

$$p_A V/2 = [m_1/(2\mu_1) + m_2/\mu_2]RT, \quad p_B V/2 = [m_1/(2\mu_1)]RT, \qquad (1)$$

$$p_A = [m_1/(2\mu_1) + m_2/\mu_2]\, RT/(V/2) = 300 \text{ kPa},$$

$$p_B = [m_1/(2\mu_1)]RT/(V/2) = 200 \text{ kPa}. \qquad (2)$$

1.5.14. *Două vase, legate printr-un tub scurt cu robinet, conţin aer la temperaturi egale. În primul vas presiunea este* $p_1 = 40$ kPa ***şi volumul vasului este de*** $n = 3{,}0$ ori ***mai mare de-cât volumul celui de-al doilea. Masa aerului din al doilea vas este de*** $r = 5{,}0$ ori ***mai mare decât în primul. Ce presiune se stabileşte în vase dacă deschidem robinetul ?***

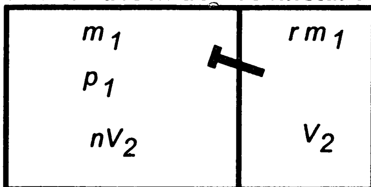


Fig.1.5.14

Rezolvare. Scriem *conservarea numărului de moli*:

$$\nu_1 + r\nu_1 = (1 + r)\cdot p_1 \cdot nV_2/(RT) = \nu' = p'\cdot(nV_2 + V_2)/(RT),$$

$$p' = p_1\cdot(1 + r)\, n/(n + 1) = (9/2)\, p_1 = 180 \text{ kPa}.$$

1.5.15. *În două vase de volume* $V_1 = 10{,}0$ L, $V_2 = 20{,}0$ L ***se află oxigen, respectiv la temperaturile*** $T_1 = 300$ K, $T_2 = 290$ K ***şi presiunile*** $p_1 = 100$ kPa, $p_2 = 200$ kPa. ***Vasele se pun în legătură printr-un mic tub cu robinet. Ce masă de gaz trece dintr-un vas în celălalt după deschiderea robinetului, dacă vasele rămân în continuare termostatate la aceleaşi temperaturi iniţiale ?***

Rezolvare Scriem *conservarea numărului de moli*:

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu_1' + \nu_2' \rightarrow p_1V_1/T_1 + p_2V_2/T_2 = p'V_1/T_1 + p'V_2/T_2. \qquad (1)$$

Numărul de moli de gaz care trec din vasul *2* (unde presiunea este mai mare) în vasul ***1*** este evident :

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_2' = p_2V_2/(RT_2) - p'V_2/(RT_2). \qquad (2)$$

Înlocuind aici p' (1) găsim masa transferată :

$$m = \Delta\nu\cdot\mu = \mu\, V_1V_2(p_2 - p_1) : [R(V_1T_2 + V_2T_1)] = 8{,}1 \text{ g}. \qquad (3)$$

1.5.16. ***Într-un vas se află un amestec de heliu şi oxigen, care la temperatura*** $t = -2{,}0^oC$ ***şi presiunea*** $p = 91{,}3$ kPa ***are densitatea*** $\rho = 0{,}44$ kg/m^3. ***Ce presiune va fi în vas dacă din el dispare, prin oxidarea pereţilor, o fracţiune*** $f = 0{,}50$ ***din moleculele de oxigen ?***

Rezolvare. Fie $x_{1,2} = \nu_{1,2} / V$ *concentraţiile molare* iniţiale ale componenţilor. Atunci $pV = (\nu_1 + \nu_2)RT \rightarrow x_1 + x_2 = p/(RT)$. (1)

Pe de altă parte, **densitatea** amestecului :

$$\rho = (\nu_1 \mu_1 + \nu_2 \mu_2)/V = x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 . \qquad (2)$$

Din aceste două ecuaţii rezultă :

$$x_1 = [\mu_2 p/(RT) - \rho] : (\mu_2 - \mu_1) = 30 \text{ mol/m}^3,$$

$$x_2 = [\rho - \mu_1 p/(RT)] : (\mu_2 - \mu_1) = 10 \text{ mol/m}^3 . \qquad (3)$$

Presiunea finală cerută :

$$p' = [\nu_1 + (1 - f)\nu_2]\, RT/V = [x_1 + (1 - f)x_2]\, RT =$$

$$= p\,[x_1 + (1 - f)x_2] : (x_1 + x_2) = 80 \text{ kPa} \qquad (4)$$

sau înlocuind $x_{1,2}$ din (3) :

$$p' = p - f(\rho RT - \mu_1 p)/(\mu_2 - \mu_1) = 80 \text{ kPa} . \qquad (5)$$

1.5.17. ***Două vase identice sunt separate printr-o membrană semipermeabilă, care lasă să treacă liber numai moleculele de hidrogen. În primul vas se introduce un amestec de*** Ar ***şi*** H_2 ***la presiunea*** $p = 150$ kPa, ***iar în celălalt este iniţial* vid. *În starea finală presiunea din primul vas a devenit*** $p' = 100$ kPa. ***Aflaţi raportul maselor*** m_1/m_2 ***de argon şi hidrogen. Temperatura este constantă .***

Rezolvare. Hidrogenul se va răspândi *uniform* în ambele vase, deci jumătate din el trece în vasul al doilea. Atunci *ecuaţia de stare* se scrie:

$$pV = (m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)RT, \quad p'V = [m_1/\mu_1 + m_2/(2\mu_2)]RT. \qquad (1)$$

Împărţim ecuaţiile membru la membru :

$$p/p' = (m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2) : [m_1/\mu_1 + m_2/(2\mu_2)] =$$

$$= (m_1/m_2 + \mu_1/\mu_2) : [m_1/m_2 + \mu_1/(2\mu_2)] , \qquad (2)$$

$$m_1/m_2 = (\mu_1/\mu_2) \cdot (2p' - p) : [2(p - p')] = 10 . \qquad (3)$$

1.5.18. ***Mase egale din două gaze diferite se introduc iniţial într-un vas de volum*** V_1 ***separat de un alt vas vidat, de volum*** V_2, ***printr-o membrană* semipermeabilă *fixă, care lasă să treacă liber numai moleculele din primul gaz . După stabili-***

rea echilibrului la temperatura constantă , presiunea din vasul 1 scade de n = 2,0 ori. ***Aflaţi raportul volumelor*** V_2 / V_1 , ***ştiind că primul gaz este de*** k = 2,0 ori ***mai uşor decât al doilea.***

Rezolvare. Pentru gazul *1* membrana este *permeabilă*, ca şi cum n-ar exista, şi el se răspândeşte *uniform* pe ambele volume. Atunci din masa sa totală o fracţiune $V_1 / (V_1 + V_2)$ va rămâne în vasul *1* şi cealaltă fracţiune $V_2 / (V_1 + V_2)$ se duce în vasul *2*.

Scriem **ecuaţia de stare** pentru gazele din primul vas :

$$pV_1 = (m / \mu_1 + m / \mu_2)RT ,$$

$$(p / n) V_1 = [(m / \mu_1) V_1 / (V_1 + V_2) + m / \mu_2] RT . \quad (1)$$

Împărţim ecuaţiile membru la membru :

$$n = (1 / \mu_1 + 1 / \mu_2) : \{1 / [\mu_1(1 + V_2 / V_1)] + 1 / \mu_2\} \rightarrow$$

$$V_2 / V_1 = (n - 1)(1 + \mu_2 / \mu_1) : (1 + \mu_2 / \mu_1 - n) . \quad (2)$$

Raportul în care o substanţă este mai *grea* decât alta este egal cu raportul ***densităţilor***, deci la gaze (evident în **aceleaşi** condiţii de presiune şi temperatură) :

$$\rho_2 / \rho_1 = \mu_2 p / (RT) : [\mu_1 p / (RT)] = \mu_2 / \mu_1 = k . \quad (3)$$

Atunci (2) se scrie:

$$V_2 / V_1 = (n - 1)(1 + k) : (1 + k - n) = 3,0 . \quad (4)$$

1.5.19. ***Într-un cilindru vertical vidat se introduce sub piston (care poate luneca etanş fără frecări) hidrogen şi heliu care ocupă la echilibru jumătate din volumul cilindrului. Datorită unui orificiu în piston, închis cu o membrană permeabilă pentru*** He , ***volumul final al amestecului devine*** V / 3. ***Aflaţi raportul maselor*** m_2 / m_1. ***Temperatura este constantă .***

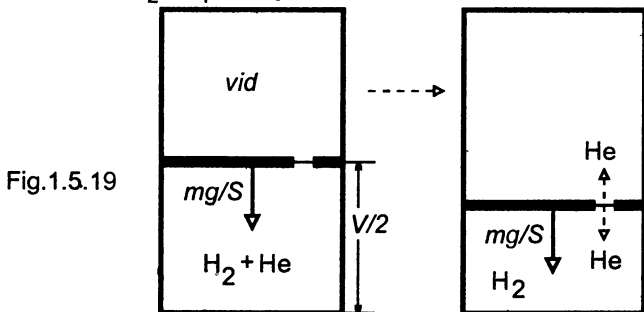


Fig.1.5.19

Rezolvare. Iniţial presiunea amestecului egalează presiunea exercitată de piston, *mg / S* (deasupra pistonului fiind vid). În starea finală heliul se răspândeşte în întregul cilindru şi presiunea sa

va fi aceeaşi deasupra şi dedesubtul pistonului, de aceea presiunea exercitată de piston este echilibrată chiar de presiunea *parţială* a hidrogenului de sub piston. Scriem **ecuaţia de stare** pentru compartimentul inferior, pentru amestecul iniţial, şi pentru hidrogen în starea finală : $(mg/S)\cdot V/2=(m_1/\mu_1+m_2/\mu_2)RT$,

$$(mg/S)\cdot V/3=(m_1/\mu_1)RT. \qquad (1)$$

Împărţim cele două ecuaţii membru la membru :

$$3/2=(m_1/\mu_1+m_2/\mu_2):(m_1/\mu_1)=1+(m_2/m_1)(\mu_1/\mu_2),$$

$$m_2/m_1=\mu_2/(2\mu_1)=1{,}00\,. \qquad (2)$$

1.5.20. ***Un vas cilindric este împărţit în două jumătăţi printr-un piston termoconductor, aflat în echilibru. Iniţial în stânga este un amestec de*** He ***şi*** H_2***, iar în dreapta*** O_2 ***cu masa*** m_3 = = 32 g. ***În piston există un orificiu închis cu o membrană permeabilă numai pentru*** He, ***astfel încât în starea finală pistonul delimitează în stânga un sfert din volumul cilindrului. Aflaţi masele*** m_1 ***de*** He ***şi*** m_2 ***de*** H_2 .

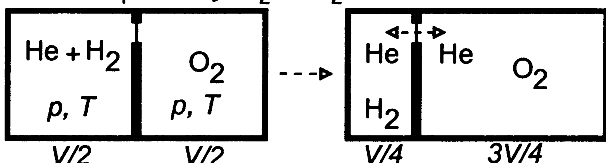


Fig.1.5.20

Rezolvare. La *echilibru mecanic* al pistonului presiunea de o parte şi de alta a pistonului trebuie să fie aceeaşi :

$$p=(\nu_1+\nu_2)RT:(V/2)=\nu_3RT:(V/2)\ \rightarrow\ \nu_1+\nu_2=\nu_3. \qquad (1)$$

În starea finală heliul se răspândeşte uniform în *întregul* vas, deci presiunea sa de o parte şi de alta a pistonului va fi aceeaşi. Atunci presiunea hidrogenului va fi egală cu presiunea oxigenului :

$$p'=(m_2/\mu_2)\,RT:(V/4)=(m_3/\mu_3)\,RT:(3V/4)\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ m_2=m_3\cdot\mu_2/(3\,\mu_3)=(2/3)\ \text{g}\,. \qquad (2)$$

Dar din (1) rezultă:

$$m_1/\mu_1+m_2/\mu_2=m_3/\mu_3\ \rightarrow\ m_1=m_3\,\mu_1/\mu_3-m_2\,\mu_1/\mu_2=$$

$$=m_3\,[\,\mu_1/\mu_3-\mu_1/(3\,\mu_3)\,]=m_3\cdot 2\,\mu_1/(3\,\mu_3)=(8/3)\ \text{g}\,. \qquad (3)$$

1.5.21. ***Un cilindru orizontal este împărţit iniţial în 3 compartimente, ca în figură, cu ajutorul a două pistoane subţiri, care se mişcă etanş fără frecări. Care vor fi poziţiile finale ale pistoanelor, dacă pistonul din stânga este permeabil pentru*** H_2, ***iar cel din dreapta este permeabil pentru*** H_2 ***şi*** He ***?***

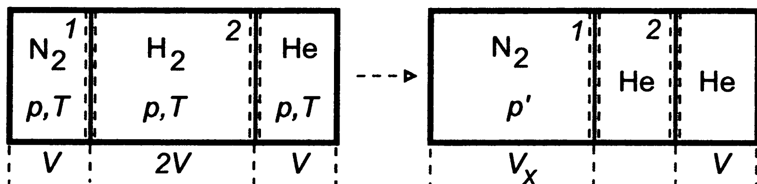


Fig.1.5.21

Rezolvare. Deoarece ambele pistoane sunt *permeabile* pentru H_2, acesta se va răspândi uniform în *întregul* cilindru şi presiunea sa parţială va fi aceeaşi peste tot, deci el nu va influenţa poziţia pistoanelor şi iese din joc. Azotul rămâne însă închis în compartimentul stâng şi final va avea volumul V_x. Pe de altă parte pistonul *2* este permeabil pentru heliu, deci heliul se va destinde de la volumul său iniţial V la volumul $4V - V_x$. Pistonul *1* se va deplasa spre dreapta până când se egalează presiunea azotului cu presiunea parţială a heliului :

$$p' = pV/V_x = pV/(4V - V_x) \rightarrow V_x = V/2,$$

deci pistonul *1* se va deplasa până la mijlocul cilindrului.

* **1.5.22.** ***Un balon cu înveliş rigid conţine aer la temperatura*** $t_i = 57^oC$, ***temperatura aerului exterior fiind*** $t_e = 17^oC$. ***Camera balonului comunică cu exteriorul. Balonul pluteşte în echilibru la o anumită înălţime. Cu cât se schimbă această înălţime dacă temperatura aerului din interior creşte cu*** $\Delta T_i = 0{,}10$ K , ***iar temperatura aerului exterior rămâne constantă ?***

Rezolvare. *Condiţia de plutire* : $m + \rho_i V = \rho_e V$. (1)

Deoarece variaţia de temperatură este foarte mică, şi variaţia densităţii va fi foarte mică, de aceea putem calcula *variaţiile* ca ***diferenţiale*** : $d(m + \rho_i V) = d(\rho_e V)$ sau $d\rho_i = d\rho_e$, (2)

prin variaţia densităţii ρ_i balonul urcă sau coboară astfel ca ρ_e să varieze la fel. Dar $\rho_e = \mu p/(RT_e)$, (3)

de unde *derivata logaritmică* dă (întâi logaritmăm , apoi diferenţiem): $d\rho_e/\rho_e = dp/p$, $d\rho_e = \rho_e \cdot dp/p$, (4)

$\rho_i = \mu p/(RT_i)$ dă $d\rho_i/\rho_i = dp/p - dT_i/T_i$,

$d\rho_i = \rho_i(dp/p - dT_i/T_i) = d\rho_e = \rho_e \cdot dp/p$, (5)

de unde $dp/p = \rho_i(dT_i/T_i) : (\rho_i - \rho_e)$. (6)

Formula presiunii *hidrostatice* : $dp = -\rho_e g\, dh$. (7)

Din formulele de mai sus rezultă acum :

$$dh = -dp/(\rho_e g) = -(p/g)(\rho_i/\rho_e)(dT_i/T_i)\,[1 : (\rho_i - \rho_e)] =$$

$$= -(p/g)(T_e/T_i)(dT_i/T_i)\,\{1 : [(\mu p/R)(1/T_i - 1/T_e)]\} =$$

$$= RT_e^2\, dT_i : [\mu g T_i (T_i - T_e)]\,, \qquad (8)$$

ceea ce înseamnă acum (trecând de la diferențiale la variații *mici*):

$$\Delta h \cong RT_e^2 \Delta T_i : [\mu g T_i (T_i - T_e)] = 18 \text{ m}\,. \qquad (9)$$

*** * 1.5.23. *Într-o mină adâncă, cum variază presiunea aerului cu distanța până la centrul Pământului ? La suprafața Pământului presiunea este* p_o. *Se consideră temperatura constantă.***

Rezolvare. Să luăm un strat orizontal *infinit de subțire* de grosime dr, la distanța r de centrul Pământului. Diferența de presiune de o parte şi de alta a stratului este dată de presiunea hidrostatică a stratului :

$$dp = -\rho\, g\, dr\,, \qquad (1)$$

unde semnul minus se datoreşte faptului că dp şi dr sunt de semne *opuse* (dacă coborâm în mină $dr < 0$, iar presiunea creşte $dp > 0$). Dar

$$\rho = \mu p/(RT)\,, \qquad g = g_o \cdot r/R_P\,. \qquad (2)$$

Rezultă atunci

$$dp = -[\mu p/(RT)]\,[g_o\, r/R_P]\, dr\,, \qquad (3)$$

care, după separarea variabilelor, ne dă prin integrare (T = const) :

$$\int \frac{dp}{p} = -\frac{\mu}{RT}\frac{g_o}{R_P}\int r dr$$

sau

$$\ln p = -[\mu/(RT)]\,[g_o/R_P] \cdot r^2/2 + C\,,$$

unde constanta de integrare se determină din *condiția la margine*, ca pentru $r = R_P$ să avem $p = p_o$;

$$\ln p_o = -[\mu/(RT)]\,[g_o/R_P] \cdot R_P^2/2 + C\,,$$

deci

$$\ln(p/p_o) = \mu\, g_o(R_P^2 - r^2) : (2RTR_P)\,,$$

$$p = p_o \exp\{\mu\, g_o(R_P^2 - r^2) : (2RTR_P)\}\,. \qquad (4)$$

Se putea integra şi *definit* (limitele de integrare se corespund):

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{\mu}{RT}\frac{g_o}{R_P}\int_{R_P}^{r} r dr$$

sau $\ln(p/p_o) = -\mu\, g_o(r^2/2 - R_P^2/2) : (2RTR_P)$, etc.,

aici limitele trebuie să se corespundă, adică pentru $r = R_P$ presiunea este $p = p_o$, iar la distanța r este p.

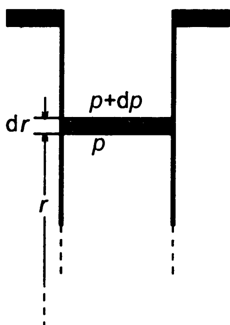


Fig.1.5.23

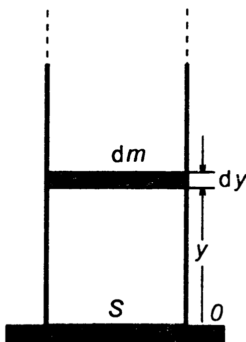


Fig.1.5.25

* * **1.5.24.** ***Considerând că temperatura aerului scade cu altitudinea după o lege* liniară*, deduceți formula variației presiunii și densității atmosferice cu altitudinea. Comparați presiunea și densitatea date de această formulă, luând gradientul temperaturii*** $t^* = 6{,}0$ K/km ***și temperatura la sol*** $t_0 = 17^oC$, ***cu cele date de formula exponențială (luând temperatura medie*** $t = 7{,}0^oC$***), la altitudinea*** $h = 2{,}9$ km .

Rezolvare. $T = T_0 - t^*y$, $(y < T_0/t^*)$, $\rho = \mu p/(RT)$, (1)

formula presiunii hidrostatice :

$$dp = -\rho g dy = -\mu p g dy : [R(T_0 - t^*y)] . \quad (2)$$

Separăm variabilele: $dp/p = -(\mu g/R)\cdot dy : (T_0 - t^*y)$ (3)

și integrăm membru cu membru :

$$\int \frac{dp}{p} = \frac{\mu g}{Rt^*}\int \frac{-t^* dy}{T_0 - t^* y} ,$$

$$\ln p = [\mu g/(Rt^*)] \ln(T_0 - t^*y) + C ,$$

unde constanta de integrare se determină din *condiția la margine*: pentru $y = 0$ avem $p = p_0$; $\ln p_0 = [\mu g/(Rt^*)] \ln T_0 + C$, deci

$$\ln(p/p_0) = [\mu g/(Rt^*)] \ln[(T_0 - t^*y)/T_0] . \quad (4)$$

Se poate integra *definit* (limitele de integrare trebuie să se corespundă : la $y = 0$ corespunde p_0 și la y corespunde p):

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \frac{\mu g}{Rt^*}\int_0^y \frac{-t^* dy}{T_0 - t^* y} ,$$

$$\ln(p/p_0) = [\mu g/(Rt^*)] \ln[(T_0 - t^*y)/T_0] .$$

Prin urmare, $$p = p_0(1 - t^*y / T_0)^{\mu g/(Rt^*)},\qquad(5)$$
deci la înălțimea cerută $y = h$:
$$p = p_0(1 - t^*h / T_0)^{\mu g/(Rt^*)} = 0,70\, p_0 .\qquad(6)$$
Rezultatul coincide practic cu cel obținut cu formula barometrică clasică : $$p = p_0 e^{-\mu gh/(RT)} = 0,70\, p_0 .\qquad(7)$$

Densitatea:
$$\rho = \mu p / (RT) = [\mu p_0 / (RT_0)]\,(1 - t^*y / T_0)^{\mu g/(Rt^*) - 1} =$$
$$= \rho_0(1 - t^*y / T_0)^{\mu g/(Rt^*) - 1},\qquad(8)$$
$$\rho = \rho_0(1 - t^*h / T_0)^{\mu g/(Rt^*) - 1} = 0,74\, \rho_0\qquad(9)$$
față de $$\rho = \rho_0\, e^{-\mu gh/(RT)} = 0,70\, \rho_0.$$

* * **1.5.25.** ***Calculați masa coloanei de aer atmosferic de secțiune*** S =1,00m^2 ***și înălțime*** h =1,00 km, ***știind densitatea*** ρ_0=1,30 kg/m^3 **și presiunea** p_0 = 100 kPa ***la suprafața Pământului*** (T = = const ***și*** g = const). ***Cât va fi greutatea unei coloane* infinite *?***

Rezolvare. *Formula barometrică*:
$$p(y) = p_0 e^{-\mu gy/(RT)},\qquad(1)$$
$$\rho(y) = \mu p(y) / (RT) = [\, \mu p_0 / (RT)]e^{-\mu gy/(RT)} = \rho_0 e^{-\rho_0 gy/p_0}.\qquad(2)$$
Luăm un strat orizontal *infinit de subțire* la înălțimea y, deci de grosime dy având masa
$$dm = \rho dV = \rho(y)\, Sdy = \rho_0 S\, e^{-\rho_0 gy/p_0}\, dy .\qquad(3)$$
Integrăm :
$$m = \int dm = \int_0^h \rho_0 S\, e^{-\rho_0 gy/p_0}\, dy = \frac{Sp_0}{g}\left(1 - e^{-\rho_0 gh/p_0}\right) = 1{,}2\ \text{t} .\qquad(4)$$
Greutatea coloanei *infinite* ($h \to \infty$) : $G = Sp_0$ = 100 kN. (5)

* * **1.5.26.** ***Arătați că centrul de masă*** (CM) ***al unei coloane cilindrice verticale (infinite) de gaz se află la înălțimea la care densitatea gazului scade de*** e ***ori. Se consideră*** T = const ***și*** g = const.

Rezolvare. Luăm un strat orizontal *infinit de subțire* situat la înălțimea y, deci de grosime dy, având masa elementară (v. fig. de la problema precedentă):
$$dm = \rho dV = \rho(y)Sdy = \rho_0\, e^{-\mu gy/(RT)}\, Sdy .\qquad(1)$$

Prin integrare obținem masa totală :

$$m = \int_0^\infty \rho_0 S e^{-\mu g y/(RT)} dy = \frac{\rho_0 S}{-\mu g/(RT)} e^{-\mu g y/(RT)}\Big|_0^\infty = \rho_0 \frac{SRT}{\mu g}. \quad (2)$$

Coordonata CM este prin definiție :

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\int y dm = \frac{1}{m}\int_0^\infty y \rho_0 e^{-\mu g y/(RT)} S dy. \quad (3)$$

Integrala de aici se integrează prin părți :

$$\int x e^{-\alpha x} dx = \int x \frac{d e^{-\alpha x}}{-\alpha} = -\frac{x}{\alpha} e^{-\alpha x} + \frac{1}{\alpha}\int e^{-\alpha x} dx =$$

$$= -(1/\alpha) x e^{-\alpha x} - (1/\alpha^2) e^{-\alpha x} + C. \quad (4)$$

Luată între limitele $(0, \infty)$ dă $1/\alpha^2$, deci în cazul nostru :

$$y_{cm} = (\rho_o S/m)[RT/(\mu g)]^2 = RT/(\mu g). \quad (5)$$

La această înălțime densitatea și presiunea sunt :

$$\rho = \rho_o e^{-\mu g y_{cm}/(RT)} = \rho_o/e, \quad p = p_o e^{-\mu g y_{cm}/(RT)} = p_o/e. \quad (6)$$

* * **1.5.27.** ***Un tub cilindric de lungime*** $2\ell = 2{,}00$ m , ***deschis la capete, se rotește în planul orizontal în jurul axei verticale trecând prin mijlocul tubului cu turația constantă*** n = 1200 rot/min , ***ca în figură. Presiunea atmosferică este*** **normală, *iar temperatura*** t = 17°C . ***Cum variază presiunea de-a lungul tubului și ce valoare are în centrul tubului ?***

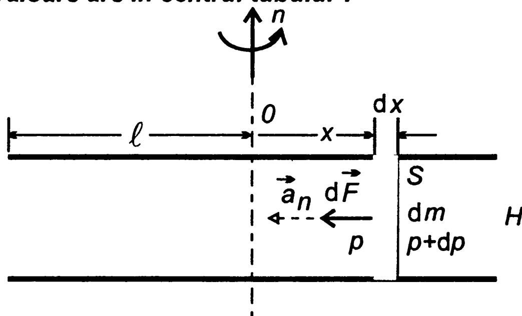


Fig.1.5.27

Rezolvare. Luăm un *element* de masă d*m* la distanța *x* de axa de rotație și având deci grosimea d*x*, ca în figură. El are o *mișcare circulară uniformă*, deci (***lex secunda***) :

$$dF = dm \cdot \omega^2 x, \quad dF = (p + dp)S - pS = Sdp, \quad (1)$$

$$dm = \rho dV = \rho S dx, \quad \text{dar} \quad \rho = \mu p/(RT), \quad (2)$$

rezultă

$$Sdp = [S \mu p/(RT)] \omega^2 x \, dx. \quad (3)$$

Separăm variabilele şi integrăm :

$$dp/p = [\mu/(RT)]\,\omega^2 x\,dx, \qquad \int \frac{dp}{p} = \frac{\mu}{RT}\omega^2 \int x dx,$$

$$\ln p = [\mu/(RT)]\,\omega^2 x^2/2 + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția la *margine*: pentru $x = \ell$ presiunea $p = H$: $\ln H = [\mu/(RT)]\,\omega^2\ell^2/2 + C,$

deci $\ln(p/H) = [\mu/(2RT)]\,\omega^2(x^2 - \ell^2)$,

$$p = H \exp\{[\mu/(2RT)]\,\omega^2(x^2 - \ell^2)\}. \qquad (4)$$

Putem integra şi *definit* (limitele de integrare se corespund):

$$\int_H^p \frac{dp}{p} = \int_\ell^x \frac{\mu}{RT}\omega^2 x dx, \qquad \ln\frac{p}{H} = \frac{\mu}{2RT}\omega^2 x^2\Big|_\ell^x, \text{ etc.}$$

La mijlocul tubului presiunea va fi (x = 0) :

$$p(0) = H \exp\{[-\mu/(2RT)]\,\omega^2\ell^2\} = 0{,}91\,H = 92{,}1 \text{ kPa}. \qquad (5)$$

* * **1.5.28.** ***Un tub cilindric orizontal, de lungime*** ℓ = 1,00 m, ***închis la un capăt, se roteşte cu turația*** n = 600 rot/min ***în jurul unei axe verticale, care trece prin capătul deschis al tubului. Presiunea atmosferică*** H ***este* normală, *iar temperatura*** t =17°C. ***Calculați presiunea aerului din tub lângă capătul închis.***

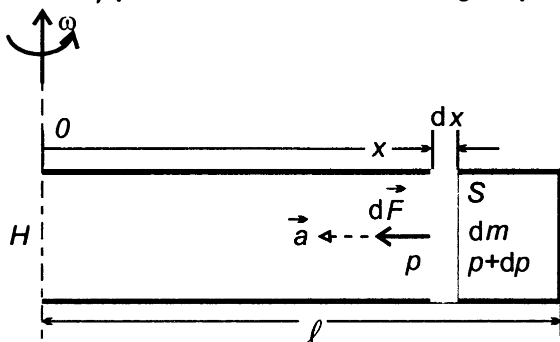


Fig.1.5.28

Rezolvare. Luăm un *element* de masă d*m* de grosime *infinit mică*, situat la distanța *x* de axă, deci de grosime d*x*, ca în figură:

$$dm = \rho dV = \rho S dx. \qquad (1)$$

Acest *element* de masă descrie uniform un cerc de rază *x*, deci are accelerația centripetă $\omega^2 x$ produsă de forța centripetă

$$dF = (p + dp)S - pS = S dp, \qquad (2)$$

dată de diferența de presiune. Prin urmare, *principiul* II se scrie

$$dF = S dp = dm \cdot a = \rho S dx \cdot \omega^2 x, \text{ dar } \rho = \mu p/(RT), \qquad (3)$$

deci

$$Sdp = [\,\mu p/(RT)]\, S\omega^2 x dx\,. \quad (4)$$

Separăm variabilele şi integrăm (considerăm T = const):

$$\frac{dp}{p} = \frac{\mu}{RT}\omega^2 x dx, \quad \int \frac{dp}{p} = \ln p = \int \frac{\mu}{RT}\omega^2 x dx = \frac{\mu}{2RT}\omega^2 x^2 + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția *la margine* : pentru $x = 0$ avem $p = H$; $\ln H = C$, deci

$$\ln(p/H) = [\,\mu/(2RT)]\,\omega^2 x^2\,,\quad p = H \exp\{\,[\,\mu/(2RT)]\,\omega^2 x^2\}\,. \quad (5)$$

Se putea integra şi *definit* (limitele de integrare se corespund):

$$\int_H^p \frac{dp}{p} = \int_0^x \frac{\mu}{RT}\omega^2 x dx\,, \quad \ln\frac{p}{H} = \frac{\mu}{2RT}\omega^2 x^2\,.$$

La capătul închis $x = \ell$:

$$p = H \exp\{\,[\,\mu/(2RT)]\,\omega^2\ell^2\} = 103{,}8\ \text{kPa} = $$
$$= 101{,}3(1 + 0{,}024)\ \text{kPa}\,. \quad (6)$$

Deoarece argumentul funcției exponențiale este « 1 , putem folosi aproximația cunoscută :

$$e^x \approx 1 + x\,,\quad \text{dacă } |x| \ll 1\,, \quad (7)$$

$$p \cong H\{1 + [\,\mu/(2RT)]\,\omega^2\ell^2\} = H(1 + 0{,}024)\,, \quad (8)$$

deci presiunea creşte doar cu 2,4 % .

* * *

2. PRINCIPIILE TERMODINAMICII

2.1. Transformări simple

2.1.1. ***Un gaz diatomic ocupă un volum*** V = 2,00 L ***la temperatura*** t_1 = 27°C ***şi presiunea*** p_1 = 100 kPa. ***Gazul este încălzit izocor până la*** p_2 = 300 kPa. ***Calculaţi:*** **a)** ***temperatura finală,*** **b)** ***căldura absorbită ,*** **c)** ***lucrul mecanic efectuat ,*** **d)** ***variaţia energiei interne .***

Rezolvare. a) Legea transformării *izocore* :

$p_2/p_1 = T_2/T_1 \rightarrow T_2 = T_1 \cdot p_2/p_1 = 900\ \text{K} = 627°\text{C}$. (1)

b) La gazele *diatomice* (ideale) căldura molară izocoră este $C_v = 5R/2$; atunci

$Q = \nu C_v(T_2 - T_1) = \nu\,(5R/2)(T_2 - T_1) = (5/2)(\nu RT_2 - \nu RT_1) =$

$= (5/2)(p_2V - p_1V) = (5/2)(p_2 - p_1)\,V = 1{,}00\ \text{kJ}$. (2)

c) $L = 0$, d) $\Delta U = Q$. (3)

2.1.2. ***Într-un vas închis se află o masă*** m = 14 g N_2 ***la presiunea iniţială*** normală ***şi temperatura iniţială*** t_1 = 27°C . ***După încălzire*** izocoră ***presiunea a crescut de*** n = 2,0 ori. ***Aflaţi :*** **a)** ***temperatura finală ,*** **b)** ***volumul ocupat de gaz ,*** **c)** ***căldura absorbită,*** **d)** ***lucrul mecanic efectuat,*** **e)** ***variaţia energiei interne.***

Rezolvare. a) $T_2 = T_1 \cdot p_2/p_1 = 600\ \text{K} = 327°\text{C}$. (1)

b) $V = (m/\mu)RT/p_1 = 12{,}3$ L. (2)

c) La gazele *diatomice* căldura molară izocoră este $C_v =$ $= 5R/2$;

$Q = \nu C_v(T_2 - T_1) = \nu\,(5R/2)T_1(T_2/T_1 - 1) =$

$= (m/\mu)(5R/2)T_1(p_2/p_1 - 1) = 3{,}11\ \text{kJ}$. (3)

d) $L = 0$, e) $\Delta U = Q$. (4)

2.1.3. ***Un gaz ideal, aflat la temperatura iniţială*** t_1=27°C, ***presiunea*** p = 100 kPa ***şi volumul iniţial*** V_1 = 3,0 L, ***efectuează izobar un lucru mecanic*** L = - 20 J. ***Aflaţi variaţia de temperatură.***

Rezolvare. Scriem *ecuația de stare* pentru cele două stări :

$$pV_1 = \nu RT_1\,, \quad pV_2 = \nu R(T_1 + \Delta T)\,, \qquad (1)$$

de unde prin scăderea ecuațiilor membru cu membru :

$$L = p(V_2 - V_1) = \nu R\,\Delta T \rightarrow \Delta T = L/(\nu R) = L : (pV_1/T_1) = -20\ \text{K} \qquad (2)$$

(gazul se comprimă și se răcește).

2.1.4. ***Aerul dintr-un cilindru cu piston a efectuat prin destindere*** **izobară** ***un lucru mecanic*** L = 200 J. ***Aflați:*** **a)** ***căldura absorbită ,*** **b)** ***variația energiei interne.***

Rezolvare. a) La gazele *diatomice* (aerul este format în principal din N_2 diatomic și O_2 diatomic) căldura molară izobară este $C_p = 7R/2$. Atunci $Q = \nu C_p(T_2 - T_1) = \nu\,(7R/2)\,(T_2 - T_1) =$

$$= (7/2)(pV_2 - pV_1) = (7/2)\,L = 700\ \text{J}\,. \qquad (1)$$

b) La gazele *diatomice* căldura molară izocoră este $C_v =$ $= 5R/2$ (reamintim relația lui **J. R. Mayer** $C_p - C_v = R$) ;

$$\Delta U = \nu C_v(T_2 - T_1) = \nu\,(5R/2)\,(T_2 - T_1) = (5/2)\,(\nu RT_2 - \nu RT_1) =$$

$$= (5/2)\,(pV_2 - pV_1) = (5/2)\,L = 500\ \text{J}\,. \qquad (2)$$

2.1.5. ***Un volum*** V = 1,00 L ***de gaz diatomic se află la presiunea*** **normală.** ***Ce cantitate de căldură trebuie transmisă gazului pentru:*** **a)** ***a mări*** **izocor** ***presiunea de*** n = 3,0 ori , **b)** ***a mări*** **izobar** ***volumul de același număr de ori ?***

Rezolvare. La gazele *diatomice* căldurile molare, izocoră și izobară, sunt $C_v = 5R/2$, $C_p = 7R/2$, $(C_p - C_v = R)$.

a) $Q_v = \nu C_v(T_2 - T_1) = \nu\,(5R/2)\,(T_2 - T_1) = (5/2)\,(\nu RT_2 -$

$$- \nu RT_1) = (5/2)\,(pnV - pV) = (5/2)\,pV(n - 1) = 506\ \text{J}\,. \qquad (1)$$

b) $Q_p = \nu C_p(T_2 - T_1) = (7/2)\,pV(n - 1) = 707\ \text{J}\,.$ (2)

2.1.6. ***Într-un cilindru vertical, cu piston de masă*** m = 10,0 kg ***și secțiune*** S = 1,00 dm^3 , ***care se poate mișca etanș fără frecări, se află aer la temperatura inițială*** $t_1 = 27^\circ$C , ***presiunea atmosferică fiind*** H =100 kPa. ***Gazul este încălzit cu*** ΔT =100 K. ***Aflați :*** **a)** ***înălțimea finală la care urcă pistonul, dacă înălțimea inițială este*** h_1 = 30 cm, **b)** ***lucrul mecanic efectuat de gaz ,*** **c)** ***căldura absorbită ,*** **d)** ***variația energiei interne .***

Rezolvare. a) Presiunea gazului este egală cu presiunea atmosferică *H* plus presiunea exercitată de piston *mg/S*. Transformarea este *izobară* la această presiune:

$T_2 / T_1 = V_2 / V_1 = Sh_2 / (Sh_1) = h_2 / h_1$, $h_2 = h_1 \cdot T_2 / T_1 = 40$ cm. (1)

b) $L = p\Delta V = (H + mg / S)S(h_2 - h_1) =$

$= (H + mg / S)S\, h_1(h_2 / h_1 - 1) = (H\, S + mg)\, h_1 \Delta T / T_1 = 109{,}8$ J. (2)

c) $Q = \nu C_p \Delta T = \nu\, (7R / 2)(T_2 - T_1) = (7 / 2)(pV_2 - pV_1) =$
$= (7 / 2)\, L = 384{,}3$ J . (3)

d) $\Delta U = \nu C_v(T_2 - T_1) = \nu\, (5R / 2)(T_2 - T_1) = (5/2)\, L = 274{,}5$ J.(4)

2.1.7. ***Într-un cilindru vertical de volum*** V = 200 cm^3, ***sub un piston de masă*** m = 50 kg ***şi arie*** S = 50 cm^2 ***(care se poate mişca etanş fără frecări), se află gaz ideal la temperatura*** T = = 300 K. ***I se comunică gazului căldura*** Q = 46,5 J ***şi temperatura lui creşte cu*** ΔT = 100 K. ***Presiunea atmosferică este normală. Aflaţi variaţia energiei interne a gazului.***

Rezolvare. Presiunea gazului este egală cu presiunea atmosferică *H* plus presiunea exercitată de piston, *mg / S*. Transformarea este *izobară* la această presiune constantă :

$\Delta U = Q - L = Q - p\Delta V = Q - (H + mg / S)(V' - V) =$

$= Q - (H + mg / S)V(V'/ V - 1) = Q - (H + mg / S)V(T'/ T - 1) =$

$= Q - (H + mg / S)V\Delta T / T = 33$ J .

2.1.8. ***Un amestec de gaz monoatomic (1) şi gaz diatomic (2) cu raportul maselor*** $m_2 / m_1 = 2{,}0$ ***şi al maselor molare*** $\mu_2 / \mu_1 = 2{,}0$ ***este încălzit izobar la presiunea*** p = 100 kPa ***de la un volum*** $V_1 = 1{,}00$ L ***până la o temperatură*** $T_2 = 2T_1$. ***Aflaţi căldura absorbită de amestec .***

Rezolvare. $Q = [\, (m_1 / \mu_1)C_{p1} + (m_2 / \mu_2)C_{p2}]\, (T_2 - T_1)$, (1)

dar $pV_1 = (m_1 / \mu_1 + (m_2 / \mu_2)\, RT_1$, (2)

$Q = [\, (m_1 / \mu_1)(R + C_{v1}) + (m_2 / \mu_2)(R + C_{v2})\,]\, T_1(T_2 / T_1 - 1) =$

$= [R(m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2) + C_{v1}\, m_1 / \mu_1 + C_{v2}\, m_2 / \mu_2](T_2 / T_1 - 1) \cdot pV_1 :$

$: [R(m_1/ \mu_1 + m_2 / \mu_2)] = pV_1\{(T_2 / T_1 - 1)\{1 + (C_{v1}m_1/ \mu_1 + C_{v2}m_2 / \mu_2) :$

$: [R(m_1/ \mu_1 + m_2/ \mu_2)]\, \} = pV_1(T_2 / T_1 - 1)\, \{1 + (C_{v1}\, \mu_2 / \mu_1 +$

$+ C_{v2}\, m_2 / m_1) : [R(\, \mu_2 / \mu_1 + m_2 / m_1)]\, \} = 300$ J . (3)

2.1.9. ***O masă*** m = 0,80 g H_2 ***aflată într-un cilindru vertical, cu piston de masă*** $m_o = 102$ kg ***şi secţiune*** S = 1,00 dm^2 ***(care se poate mişca etanş fără frecări), este încălzită până la temperatura*** $t_2 = 127^oC$. ***Energia potenţială a pistonului creşte cu***

$\Delta E_p = 83$ J . ***Presiunea atmosferică*** H = 100 kPa. ***Aflaţi:* a) *volumul iniţial al gazului* , b) *temperatura iniţială* , *c) lucrul mecanic efectuat de gaz,* d) *variaţia energiei interne a gazului* .**

Rezolvare. a) $\Delta E_p = m_o g \Delta h$, $\Delta V = S \Delta h$ $\rightarrow$

$$\Delta V = S\, \Delta E_p / (m_o g) \;. \qquad (1)$$

Presiunea gazului este egală cu presiunea atmosferică H plus presiunea pistonului $m_o g / S$.

$$V_1 = V_2 - \Delta V = (m / \mu)\, RT_2 : (H + m_o g / S) - S\, \Delta E_p : (m_o g) = 2{,}5 \text{ L.} (2)$$

b) $T_1 = [\mu / (mR)]\, (H + m_o\, g / S) V_1 = 300 \text{ K} = 27^oC$. (3)

c) $L = p(V_2 - V_1) = (m / \mu)\, R(T_2 - T_1) = 16{,}6$ J (4)

sau $L = (H + m_o g / S)\, S\, \Delta E_p : (m_o g) = [HS / (m_o g) + 1]\, \Delta E_p$. (5)

d) $Q = \nu C_p(T_2 - T_1) = \nu\, (7 / 2) R\, (T_2 - T_1) = (7 / 2)\, L = 58{,}2$ J. (6)

e) $\Delta U = \nu C_v(T_2 - T_1) = \nu\, (5 / 2) R\, (T_2 - T_1) = (5 / 2)\, L = 41{,}6$ J.(7)

2.1.10. ***Un tub vertical deschis la ambele capete, de secţiune interioară*** S = 1,00 cm^2 , ***este cufundat cu capătul inferior puţin în mercur. În tub pluteşte un piston de masă neglijabilă care se poate mişca etanş fără frecări. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a ridica pistonul încet până la înălţimea*** h' = 1,38 m. ***Presiunea atmosferică este* normală. *Reprezentaţi grafic forţa de presiune rezultantă asupra pistonului în funcţie de înălţime.***

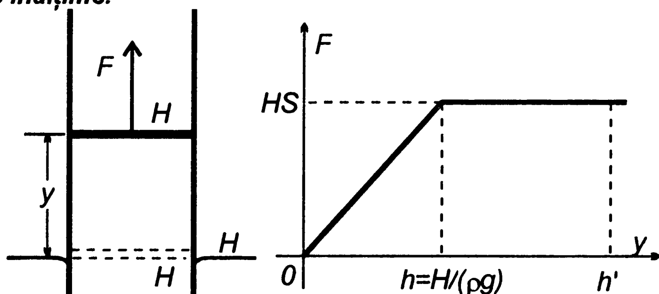


Fig.2.1.10

Rezolvare. Fie F forţa cu care tragem pistonul în sus. Cum începem să ridicăm pistonul presiunea atmosferică împinge mercurul în tub. Conform *principului vaselor comunicante*, în tub la nivelul mercurului din vas presiunea trebuie să fie atmosferică, deci

$$H = H - F / S + \rho g y \;\rightarrow\; F = \rho g y\, S \qquad (1)$$

(= greutatea coloanei de mercur din tub).

Forța aplicată F crește odată cu înălțimea y a coloanei de mercur. La un moment dat presiunea hidrostatică a coloanei echilibrează presiunea atmosferică $\rho g h = H$. Din acest moment se formează camera barometrică sub piston, în care avem *"vidul lui Torricelli"* (vapori *saturanți* de mercur care au o presiune foarte mică, neglijabilă). Din acest moment forța $F = HS$ trebuie să învingă forța presiunii atmosferice (fiindcă sub piston avem vidul lui Torricelli).
Lucrul mecanic care trebuie efectuat este dat de aria de sub graficul forței F:

$L = (1/2)HS \cdot h + HS \cdot (h' - h) = H^2S/(2\rho g) + HS[h' - H/(\rho g)]$. (2)

Primul termen reprezintă lucrul mecanic necesar urcării centrului de greutate a coloanei de mercur: $(h/2) \cdot \rho g\, hS$;

$$L = HS[h' - H/(2\rho g)] = 10{,}13 \text{ J}. \quad (3)$$

2.1.11. ***O cantitate*** $\nu = 2{,}5$ mol ***de gaz ideal, aflat la temperatura inițială*** $T_1 = 300$K, ***este răcită* izocor *până la o presiune de*** k = 3,0 ori ***mai mică, apoi încălzită* izobar *până la temperatura inițială. Aflați lucrul mecanic efectuat de gaz. Reprezentați procesul în diagramele*** p - V , V - T , p - T . ***Care este căldura absorbită în întregul proces ?***

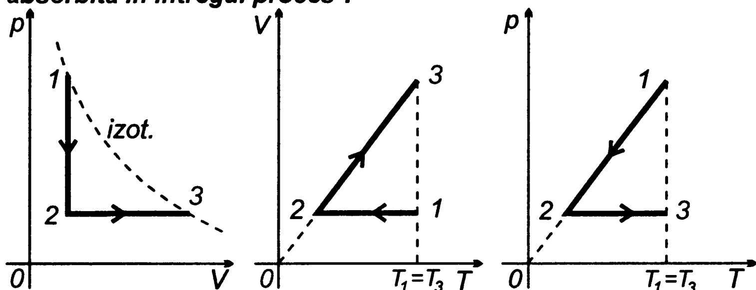


Fig.2.1.11

Rezolvare. Se efectuează lucru mecanic numai pe *izobara 2 - 3*:

$L = p_2(V_3 - V_2) = p_2V_3 - p_2V_2 = \nu R(T_3 - T_2) =$

$= \nu RT_1(1 - T_2/T_1) = \nu RT_1(1 - 1/k) = 4{,}15$ J, (1)

unde $T_2/T_1 = p_2/p_1 = 1/k$ (transformare *izocoră*). Deoarece $T_1 = T_3$ avem $\Delta U = 0$ (gaz *ideal*! - energia internă a gazului *ideal* depinde *numai de temperatură*) și atunci $Q = \Delta U + L = L$. (2)

2.1.12. ***O cantitate*** $\nu = 1{,}00$ mol ***de gaz ideal suferă transformarea* 1 - 2 - 3 *din figură, unde*** $T_3 = T_1 = 300$ K ***și căldura***

netă primită este Q = 5,0 kJ. ***Aflați*** V_3/V_1. ***Reprezentați procesul în diagramele*** V - T, p - T .

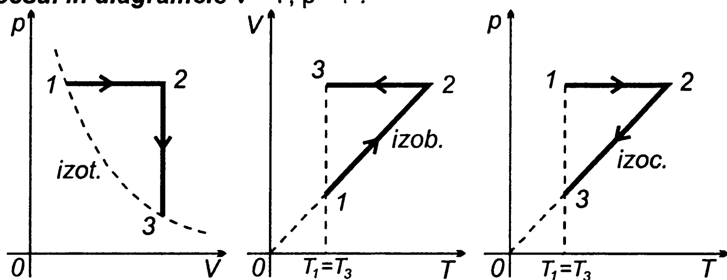


Fig.2.1.12

Rezolvare. $Q = \nu C_p(T_2 - T_1) + \nu C_v(T_3 - T_2) = \nu C_p(T_2 - T_1) -$

$- \nu C_v(T_2 - T_1) = \nu(C_p - C_v)(T_2 - T_1) = \nu R(T_2 - T_1) =$

$= \nu R T_1(T_2/T_1 - 1) = \nu R T_1(V_2/V_1 - 1)$, (1)

unde

$T_2/T_1 = V_2/V_1$, $V_3/V_1 = V_2/V_1 = 1 + Q/(\nu R T_1) = 3{,}0$ (2)

Se poate judeca şi astfel : stările 1 , 3 sunt la aceeaşi temperatură , deci $\Delta U = 0$ (gaz *ideal*), atunci

$Q = \Delta U + L = L = p_1(V_2 - V_1) = p_1V_1(V_2/V_1 - 1) =$

$= \nu R T_1(V_2/V_1 - 1)$. (3)

2.1.13. ***Într-un cilindru vertical se află la înălțimea*** h = 0,50 m ***un piston de masă*** m = 50 kg ***sub care se află*** ν =0,50 mol ***de gaz ideal, cu căldura molară*** C_p = 7R / 2 , ***la temperatura*** T = = 300 K ***şi presiunea egală cu presiunea atmosferică. Pistonul este suspendat de un fir vertical şi poate luneca etanş fără frecări. Câtă căldură trebuie transmisă gazului pentru ca pistonul să urce la o înălțime*** nh , n = 2,0 ***?***

Rezolvare. Deoarece inițial sub piston gazul are presiunea egală cu cea atmosferică, înseamnă că firul preia inițial întreaga greutate a pistonului. Pe măsură ce începem să încălzim gazul, presiunea sa va creşte *izocor* şi tensiunea din fir va slăbi până când se va anula şi presiunea gazului va echilibra presiunea atmosferică plus presiunea pistonului : $p = H + mg/S$. În acest moment temperatura va fi T' :

$T'/T = p/H = 1 + mg/(SH)$, $T'/T - 1 = mg/(SH)$ (1)

şi căldura absorbită :

$Q' = \nu C_v(T' - T) = \nu C_v T(T'/T - 1) = \nu C_v Tmg/(SH)$, (2)

dar în starea inițială $H \cdot Sh = \nu RT \rightarrow 1/(SH) = h/(\nu RT)$, (3)
atunci (2) devine

$$Q' = \nu C_V Tmg \cdot h/(\nu RT) = (C_V/R)mgh = [(C_p - R)/R]mgh . \quad (4)$$

În continuare firul se "scofâlcește" și gazul se destinde izobar :

$$Q'' = \nu C_p(T'' - T') = \nu C_p T'(T''/T' - 1) =$$
$$= \nu C_p T[(H + mg/S)/H][Snh/(Sh) - 1] =$$
$$= \nu C_p T(n-1) + \nu C_p T[mg/(SH)](n-1) =$$
$$= \nu C_p T(n-1) + [C_p/R]\, mgh(n-1) . \quad (5)$$

Căldura totală absorbită :

$$Q = Q' + Q'' = mgh(n\,C_p/R - 1) + \nu C_p T(n-1) = 3{,}2 \text{ kJ} . \quad (6)$$

2.1.14. ***O cantitate*** $\nu = 4{,}00$ mol ***de gaz ideal parcurge ciclul din figură, în care*** $T_1 = 256$ K , $T_3 = 441$ K , ***iar stările 2 și 4 sunt pe aceeași izotermă. Aflați lucrul mecanic efectuat de gaz (cunoscând constanta*** R ***). Reprezentați ciclul în diagramele*** V - T , p - T .

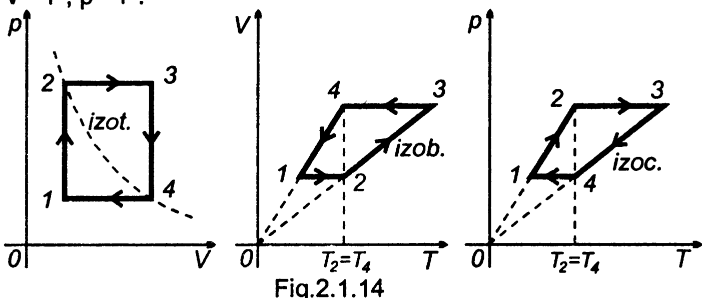


Fig.2.1.14

Rezolvare. Lucrul mecanic efectuat este egal cu aria cuprinsă de ciclu :

$$L = (p_2 - p_1)(V_4 - V_1) = p_2V_4 - p_2V_1 - p_1V_4 + p_1V_1 =$$
$$= \nu R(T_3 - T_2 - T_4 + T_1). \quad (1)$$

Pe de altă parte : $T_2/T_1 = p_2/p_1 = p_3/p_4 = T_3/T_4 \rightarrow$

$$T_2T_4 = T_1T_3 , \quad T_2 = T_4 = \sqrt{T_1T_3} . \quad (2)$$

$$L = \nu R(T_3 - 2\sqrt{T_1T_3} + T_1) = \nu R\left(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1}\right)^2 = 831 \text{ J} . \quad (3)$$

2.1.15. ***O cantitate*** $\nu = 3{,}0$ mol ***de gaz ideal suferă un proces ciclic format din două izobare :*** p_1 , αp_1 , $\alpha = 5/4$, ***și două izocore:*** V_1 , βV_1 , $\beta = 6/5$. ***Diferența dintre temperatura maximă și cea minimă pe ciclu este*** $\Delta T = 100$ K . ***Aflați lucrul mecanic efectuat de gaz (se dă constanta*** R***). Reprezentați ciclul în***

diagramele p - V, V - T, p - T .

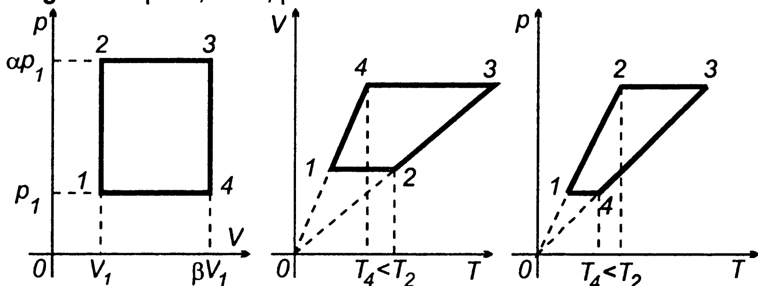


Fig.2.1.15

Rezolvare. În starea *2* : $p_2V_2 = \alpha\beta p_1V_1$ şi în starea *4* : $p_4V_4 = \beta p_1V_1$, deci $T_2 > T_4$. Lucrul mecanic este dat de aria ciclului :

$$L = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = (\alpha - 1)(\beta - 1)\, p_1V_1\,, \qquad (1)$$

dar $$p_1V_1 = \nu RT_1\,, \quad p_3V_3 = \alpha\beta p_1V_1 = \nu R(T_1 + \Delta T) \qquad (2)$$

$$\rightarrow\ p_1V_1 = \nu R\Delta T : (\alpha\beta - 1)\,; \qquad (3)$$

$$L = (\alpha - 1)(\beta - 1)\nu R\Delta T : (\alpha\beta - 1) = 249{,}3 \text{ J}\,. \qquad (4)$$

2.1.16. ***Un mol de gaz ideal se destinde*** **izobar** ***dintr-o stare*** **1** ***cu temperatura*** T = 100 K , ***apoi printr-o transformare*** **izocoră** ***ajunge în starea finală*** **2** ***cu o aceeaşi temperatură*** T . ***În acest proces gazul absoarbe (net) căldura*** Q = 831 J. ***Aflaţi raportul de destindere*** V_2 / V_1 (***se dă*** R). ***Reprezentaţi procesul în diagramele*** p - V , V - T , p - T .

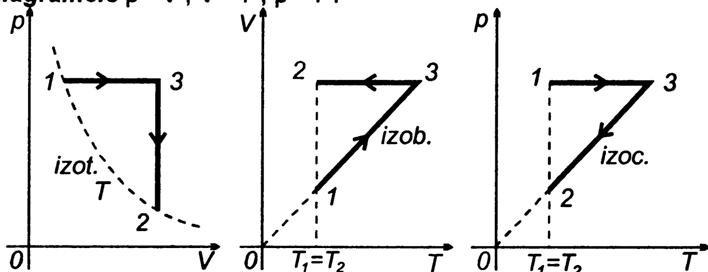


Fig.2.1.16

Rezolvare. $Q = \nu C_p(T_3 - T) + \nu C_v(T - T_3) = \nu(C_p - C_v)(T_3 - T) =$

$$= \nu RT(T_3 / T - 1)\,, \qquad T_3 / T = 1 + Q / (\nu RT)\,. \qquad (1)$$

Pe de altă parte, transformarea *izobară 1 - 3* dă :

$$V_3 / V_1 = V_2 / V_1 = T_3 / T = 1 + Q / (\nu RT) = 2{,}0\,. \qquad (2)$$

2.1.17. ***Un mol de gaz ideal trece izocor din starea*** 1 ***în starea 2 la presiunea de*** n = 1,5 ori ***mai mică. Apoi este încălzit izobar până la temperatura inițială. În procesul*** 1 - 2 - 3 ***gazul efectuează lucrul mecanic*** L = 830 J . ***Aflați*** T_1 ***(se dă*** R***).*** ***Reprezentați procesul în diagramele*** p - V , V - T , p - T .

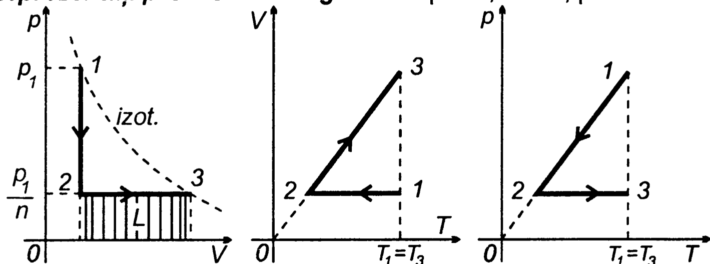


Fig.2.1.17

Rezolvare. $p_1V_1 = p_3V_3 = p_2V_3 = \nu RT_1$, (1)

$L = p_2(V_3 - V_2) = p_3(V_3 - V_1) = p_3V_3(1 - V_1/V_3) =$

$= p_3V_3(1 - p_3/p_1) = \nu RT_1(1 - 1/n)$, (2)

$T_1 = (L/(\nu R)]\,[1 : (1 - 1/n)] = 300$ K . (3)

2.1.18. ***O cantitate*** ν = 1,00 mol ***de gaz ideal*** **monoatomic este încălzită izocor** ***din starea*** **1** ***cu temperatura*** T_1 = 300 K ***în starea 2 și apoi răcită*** **izobar** ***până la temperatura*** T_3 . ***Aflați această temperatură, dacă în cele două procese căldura schimbată între gaz și mediu a fost aceeași :*** | Q | = 1,50 kJ ***(se dă constanta*** R) . ***Reprezentați procesul în diagramele*** p - V , V - T , p - T .

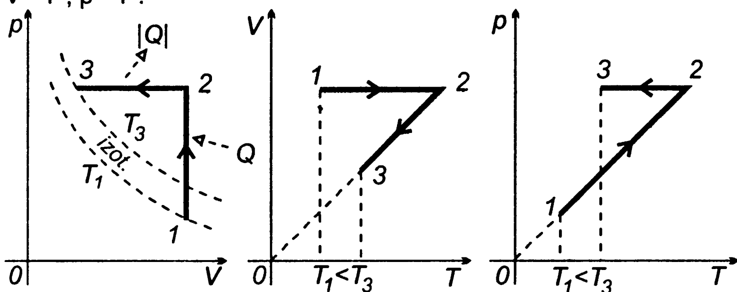


Fig.2.1.18

Rezolvare. $Q = \nu C_v(T_2 - T_1) = |\,Q\,| = \nu C_p(T_2 - T_3) \rightarrow$ (1)

$C_v(T_2 - T_1) = C_p(T_2 - T_3) \rightarrow T_2 = (C_pT_3 - C_vT_1) : (C_p - C_v)$, (2)

care introdusă în prima ecuație (1) dă :

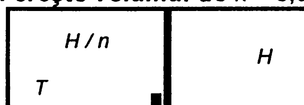
$$Q = \nu C_v(C_pT_3 - C_pT_1) : (C_p - C_v) \rightarrow T_3 = T_1 + QR/(\nu C_vC_p)\,. \quad (3)$$

Pentru gazele *monoatomice* : $C_v = 3R/2$, $C_p = 5R/2$:

$$T_3 = T_1 + QR/(\nu\, 15R^2/4) = T_1 + 4Q/(15\,\nu\, R) = 350\ \text{K}\,. \quad (4)$$

2.1.19. ***Într-un cilindru orizontal, cu piston, se află*** $\nu = 2{,}0$ mol ***de gaz la temperatura*** $T = 300$ K ***şi la o presiune de*** $n = 2{,}0$ ori **mai** ***mică decât cea atmosferică. Pistonul este împiedicat să se deplaseze în sensul*** **comprimării** ***gazului. Căldura molară izocoră a gazului este*** $C_v = 5R/2$. ***Câtă căldură trebuie transmisă gazului pentru a-i creşte volumul de*** $k = 3{,}0$ ori *?*

Fig.2.1.19



Rezolvare. Presiunea gazului fiind mai mică decât cea atmosferică şi pistonul fiind împiedicat să comprime gazul, la început, prin încălzire, presiunea gazului va creşte *izocor* până egalează presiunea atmosferică :

$$T' : T = H : (H/n) = n\,, \quad T' = n\,T\,. \quad (1)$$

După aceasta, încălzind gazul în continuare, presiunea rămâne constantă, egală cu cea atmosferică, şi gazul se destinde *izobar* :

$$T''/T' = kV/V = k\,; \quad (2)$$

$$Q = \nu C_v(T' - T) + \nu C_p(T'' - T') = \nu C_vT(T'/T - 1) + \nu C_pT'(T''/T' - 1) =$$

$$= \nu C_v\,T(n - 1) + \nu(C_v + R)T\,n(k - 1) = 47{,}4\ \text{kJ}\,. \quad (3)$$

2.1.20. ***O cantitate*** $\nu = 4{,}0$ mol ***de gaz ideal trece dintr-o stare*** **1** ***în starea finală*** **2** ***prin două căi, ca în figură. Cunoscând*** $T_1 = 300$ K ***şi*** $T_3 = 400$ K , ***aflați diferența dintre căldurile absorbite în cele două căi. Se dă constanta*** R. ***Reprezentați procesele în diagramele*** V - T , p - T .

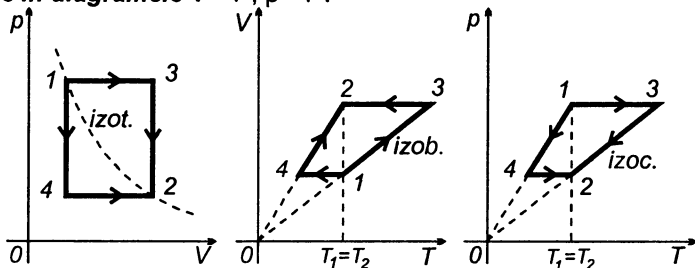


Fig.2.1.20

Rezolvare. $T_1 / T_4 = p_1 / p_4 = p_3 / p_2 = T_3 / T_2 \rightarrow$

$T_1 T_2 = T_3 T_4$, $T_1 = T_2$, $T_4 = T_1^2 / T_3$. (1)

$Q_1 = \nu C_p(T_3 - T_1) + \nu C_v(T_1 - T_3) = \nu R(T_3 - T_1)$, (2)

$Q_2 = \nu C_v(T_4 - T_1) + \nu C_p(T_1 - T_4) = \nu R(T_1 - T_4)$, (3)

$Q_1 - Q_2 = \nu R(T_3 - T_1 - T_1 + T_4) = \nu R(T_3 - 2T_1 + T_1^2 / T_3) =$

$= \nu R(T_3 - T_1)^2 / T_3 = 831$ J. (4)

2.1.21. ***Un gaz monoatomic suferă transformările din figură. Ştiind*** $T_4 - T_1 = \Delta T = 100$ K, ***aflaţi căldura absorbită de*** $\nu = 1{,}00$ mol ***de gaz (se dă*** R***). Reprezentaţi procesul şi în diagramele*** p - V , V - T.

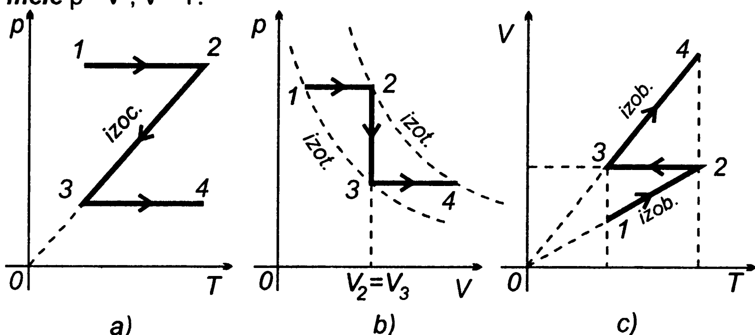


Fig.2.1.21

Rezolvare. $Q = \nu C_p(T_2 - T_1) + \nu C_v(T_3 - T_2) + \nu C_p(T_4 - T_3) =$

$= \nu C_p(T_4 - T_1) + \nu C_v(T_1 - T_4) + \nu C_p(T_4 - T_1) =$

$= \nu(2C_p - C_v)(T_4 - T_1) = \nu(2R + C_v)\Delta T = \nu(7R / 2)\Delta T = 2{,}91$ kJ .

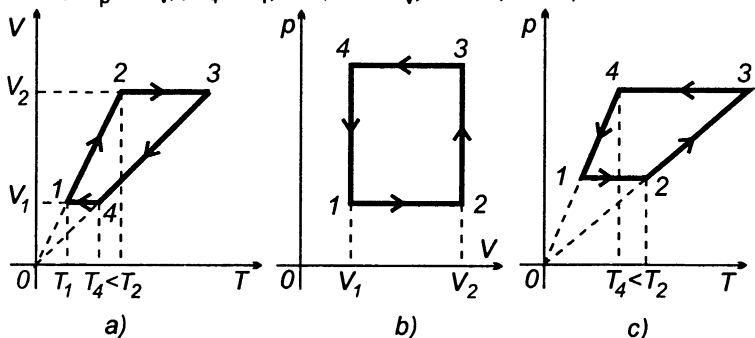


Fig.2.1.22

2.1.22. ***În ciclul din figură se cunosc :*** ν = 0,50 mol , T_1 = = 300 K, T_4 = 400 K, $V_2/V_1 = \varepsilon = 3{,}0$. ***Aflaţi lucrul mecanic efectuat de gaz. Transcrieţi ciclul în diagramele*** p - V , p - T .

Rezolvare. Lucrul mecanic efectuat de gaz este egal cu aria ciclului în diagrama *p - V* , în cazul nostru el este *negativ* :

$$L = -(p_4 - p_1)(V_2 - V_1) = -p_1V_1(p_4/p_1 - 1)(V_2/V_1 - 1) =$$

$$= -\nu RT_1(T_4/T_1 - 1)(V_2/V_1 - 1) =$$

$$= -\nu R(T_4 - T_1)(V_2/V_1 - 1) = -831 \text{ J} .$$

*

2.2. Transformarea adiabatică şi alte transformări

2.2.1. ***Un volum*** $V_1 = 2{,}00$ L ***de oxigen este comprimat*** **adiabatic** ***până la un volum final*** $V_2 = 1{,}00$ L ***şi o presiune finală*** $p_2 = 100$ kPa. ***Aflaţi :*** **a)** ***presiunea iniţială ,*** **b)** ***lucrul mecanic efectuat de gaz ,*** **c)** ***variaţia energiei interne .***

Rezolvare. a) $p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma} \rightarrow p_1 = p_2(V_2 / V_1)^{\gamma} = 38$ kPa (1)
(pentru oxigen - gaz *diatomic* - , $\gamma = 1{,}40$).

b) $L = - \Delta U = - \nu C_v(T_2 - T_1) = - (C_v / R)(\nu RT_2 - \nu RT_1) =$
$= - [C_p / (C_p - C_v)] (p_2V_2 - p_1V_1) = (p_1V_1 - p_2V_2) / (\gamma - 1) = - 405$ J (2)
(gazul este comprimat).

c) $\Delta U = - L$. (3)

2.2.2. ***Un volum*** $V_1 = 0{,}100$ L ***de gaz*** **diatomic** ***, aflat în condiţii*** **normale*****, este comprimat*** **adiabatic** ***cheltuindu-se un lucru mecanic*** $W = 46$ J. ***Aflaţi temperatura finală.***

Rezolvare. Conform problemei precedente :

$L = (p_1V_1 - p_2V_2) / (\gamma - 1) = - W \rightarrow p_2V_2 = p_1V_1 + (\gamma - 1) W ,$ (1)

$p_2V_2 / (p_1V_1) = \nu RT_2 / (\nu RT_1) = T_2 / T_1 = [p_1V_1 + (\gamma - 1)W] / (p_1V_1),$ (2)

$T_2 = T_1 [1 + (\gamma - 1) W / (p_1V_1)] = 773 \text{ K} = 500^oC$. (3)

Se putea judeca şi astfel :

$W = - L = \Delta U = \nu C_v(T_2 - T_1)$, dar $p_1V_1 = \nu RT_1$,

$W = (p_1V_1C_v / R) (T_2 / T_1 - 1) = [p_1V_1 / (\gamma - 1)] (T_2 / T_1 - 1)$, etc. (4)

2.2.3. ***Un gaz*** **diatomic** ***este comprimat micşorându-şi volumul de*** $\varepsilon = 2{,}0$ ori, ***o dată*** **adiabatic** ***, şi o dată*** **izoterm.** ***Aflaţi raportul lucrurilor mecanice .***

Rezolvare. $L_{ad} / L_{izot} = [- \nu C_v(T_2 - T_1)] : [\nu RT_1 \ln (V_2 / V_1)] =$

$= [1 / (\gamma - 1)] (- T_2 / T_1 + 1) : \ln (V_2 / V_1) = [1 / (\gamma - 1)] [(V_1 / V_2)^{\gamma - 1}] :$

$: [- \ln (V_2 / V_1)] = [1 / (\gamma - 1)] (\varepsilon^{\gamma - 1} - 1) : \ln \varepsilon = 1{,}15$, (1)

unde $R = C_p - C_v$, $\gamma = C_p / C_v$ şi pentru comprimarea *adiabatică* :
$T_1V_1^{\gamma - 1} = T_2V_2^{\gamma - 1}$. Se vede că este mai avantajos de comprimat

izoterm, fapt care se vede şi grafic. Invers, la destindere, gazul efectuează mai mult lucru mecanic pe izotermă.

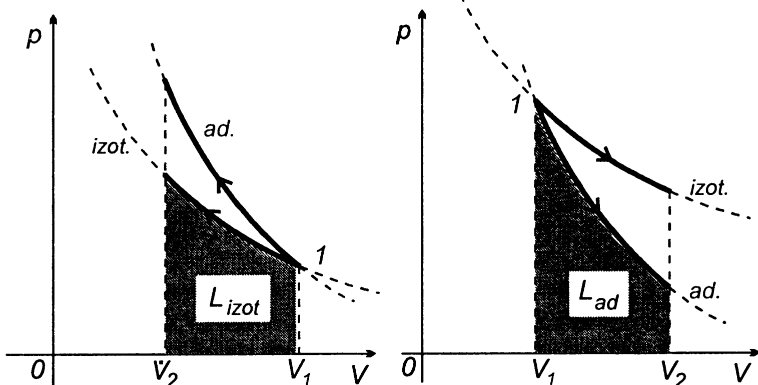


Fig.2.2.3

2.2.4. ***O masă*** $m = 2,90$ g ***de aer a fost încălzită cu*** $\Delta T = = 200$ K ***cu ajutorul cantităţii de căldură*** $Q = 700$ J . ***Aflaţi va-riaţia energiei interne şi lucrul mecanic efectuat.***

Rezolvare. $\Delta U = \nu C_V \Delta T = (m / \mu)(5R / 2)\,\Delta T = 415,7$ J (1)

(pentru gazele *diatomice* $C_V = 5R / 2$).

$$L = Q - \Delta U = 284,3 \text{ J} . \quad (2)$$

2.2.5. ***O cantitate*** $\nu = 1,6$ mol ***de gaz ideal*** diatomic ***efectuează un proces ciclic*** **1-2-3-1** ***în care*** $V_2 / V_1 = \varepsilon = 2,0$ ***şi*** $T_1 = = 300$ K. ***Aflaţi :*** a) ***lucrul mecanic efectuat în transformarea adiabatică, precum şi pe întregul ciclu,*** b) ***raportul presiunilor*** p_2 / p_3 . ***Reprezentaţi ciclul în diagramele*** V - T , p - T .

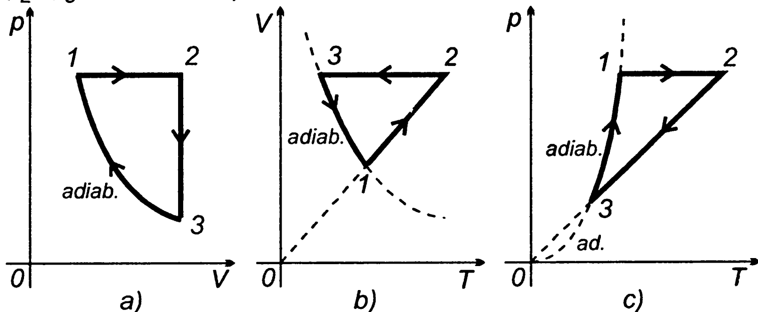


Fig.2.2.5

Rezolvare. a) $L_{ad} = - \nu C_V(T_1 - T_3) = - \nu C_V\ T_1(1 - T_3 / T_1) =$

$$= - \nu C_V\ T_1(1 - 1 / \varepsilon^{\gamma - 1}) = - 2{,}49 \text{ kJ} , \quad (1)$$

unde $T_1V_1^{\gamma - 1} = T_3V_3^{\gamma - 1}$, $V_3 = V_2$, $\gamma = 1{,}40$ pentru gazele *diatomice*.

$$L_{1\text{-}2} = p_1(V_2 - V_1) = p_1\ V_1(V_2 / V_1 - 1) = \nu RT_1(\varepsilon - 1) = 3{,}99 \text{ kJ} , \quad (2)$$

$$L_{ciclu} = L_{1\text{-}2} + L_{ad} = 1{,}50 \text{ kJ} . \quad (3)$$

b) $p_2 / p_3 = p_1 / p_3 = (V_3 / V_1)^{\gamma} = (V_2 / V_1)^{\gamma} = \varepsilon^{\gamma} = 2{,}64$. (4)

Observăm că în diagrama V - T adiabata arată asemănător ca în p - V, iar în p - T arată *ca o parabolă* care trece prin origine unde are un *minim*.

2.2.6. ***Un gaz perfect efectuează din starea inițială* 1 *o destindere* adiabatică *până într-o stare* 2. *Demonstrați că dacă din starea 2 gazul primește* izocor *o cantitate de căldură egală cu lucrul mecanic efectuat în transformarea adiabatică, temperatura gazului revine la temperatura inițială. Reprezentați procesul în diagramele*** p - V, V - T, p - T .

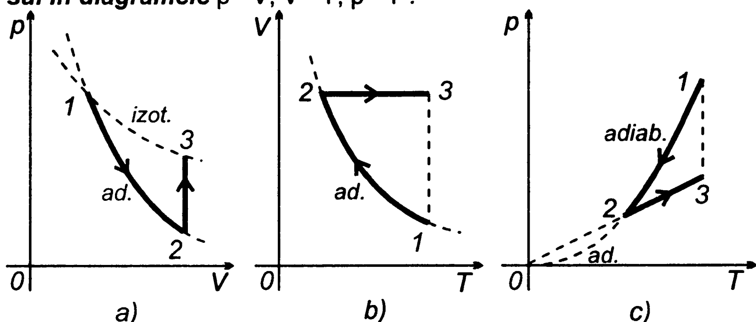


Fig.2.2.6

Rezolvare. $L_{1\text{-}2} = - \nu C_V(T_2 - T_1)$, $Q_{2\text{-}3} = \nu C_V(T_3 - T_2)$, (1)

$L_{1\text{-}2} = Q_{2\text{-}3} \rightarrow - (T_2 - T_1) = T_3 - T_2 \rightarrow T_3 = T_1$. (2)

2.2.7. ***Pentru ciclul din figură se cunosc :*** m = 3,2 g , μ = = 0,032 kg/mol ***(oxigen)*** , T_1 = 300 K , T_2 = 600 K , T_3 = 400 K. ***Aflați lucrul mecanic efectuat de gaz. Reprezentați ciclul în diagramele*** V - T , p - T .

Rezolvare. Lucrul mecanic este egal cu aria ciclului :

$$L = (1/2)(V_2 - V_1)(p_2 - p_1) = (1/2)(V_2p_2 - V_2p_1 - V_1p_2 + V_1p_1) =$$

$$= (1/2)(\nu RT_2 - V_3p_1 - V_1p_2 + \nu RT_1), \quad (1)$$

dar $\quad V_3 / V_1 = T_3 / T_1$ şi $p_2 / p_1 = p_2 / p_3 = T_2 / T_3$, (2)

$$L = (1/2)(\nu RT_2 - p_1V_1 \cdot T_3 / T_1 - p_1V_1 \cdot T_2 / T_3 + \nu RT_1) =$$
$$= [mR / (2\mu)](T_2 - T_3 - T_1T_2 / T_3 + T_1) = 20{,}75 \text{ J} . \quad (3)$$

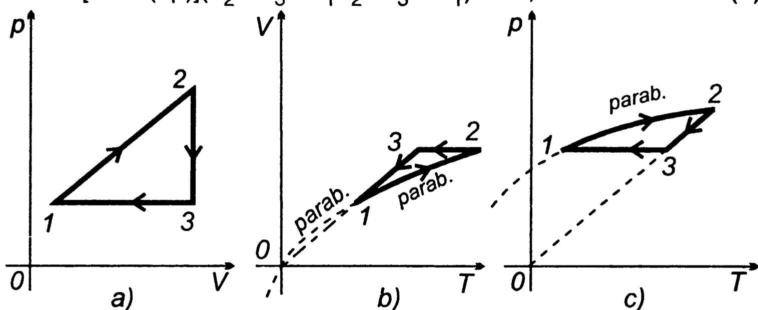


Fig.2.2.7

Ecuația procesului *1 - 2* este de forma $p = p_o + a\,V$ (linie dreaptă), atunci

$$pV = \nu RT \;\rightarrow\; (p_o + a\,V)V = \nu RT \text{ - parabolă} , \quad (4)$$

$$pV = \nu RT \;\rightarrow\; p\,(p - p_o) / a = \nu RT \text{ - parabolă} . \quad (5)$$

2.2.8. ***Un gaz ideal*** **monoatomic** ***aflat inițial la temperatura*** $t_1 = 0^oC$, $p_1 = 300$ kPa ***şi*** $V_1 = 2{,}00$ m^3, ***este comprimat*** **adiabatic** ***efectuându-se asupra gazului un lucru mecanic*** W = 35 kJ. ***Aflați până la ce temperatură se încălzeşte gazul.***

Rezolvare. $W = - L = \nu C_v(T_2 - T_1) \rightarrow T_2 = T_1 + W / (\nu C_v)$, (1)

dar $\quad \nu = p_1V_1 / (RT_1)$, atunci

$$T_2 = T_1 + W\,RT_1 / (p_1V_1C_v) = T_1\,[1 + R\,W / (C_v\,p_1V_1)] = 284 \text{ K} . \quad (2)$$

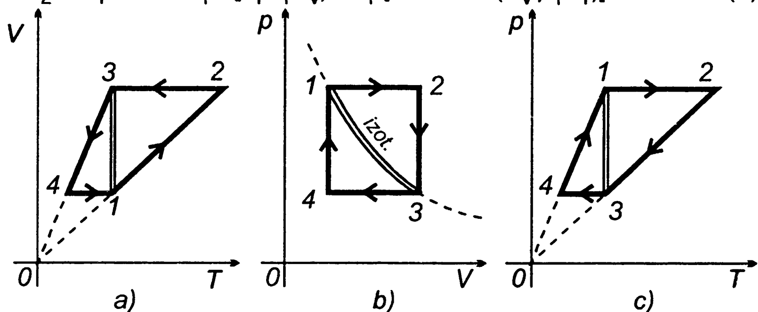


Fig.2.2.9

2.2.9. ***În care din cele două procese ciclice,*** **1-2-3** ***sau*** **1-3-4,** ***gazul efectuează un lucru mecanic mai mare ? Reprezentaţi procesul şi în diagramele*** p - V , p - T .

Rezolvare. În diagrama *p - V* se vede imediat că $L_{123} > L_{134}$ (comparăm *ariile* ciclurilor) .

2.2.10. ***Un proces ciclic efectuat cu un gaz ideal se reprezintă în diagrama*** p - V ***printr-un*** **cerc** ***parcurs în sens orar. Arătaţi grafic :*** **a)** ***pe ce porţiune a ciclului gazul primeşte căldură şi pe ce porţiune cedează,*** **b)** ***pe ce porţiune a ciclului căldura specifică este pozitivă şi pe ce porţiune este negativă .***

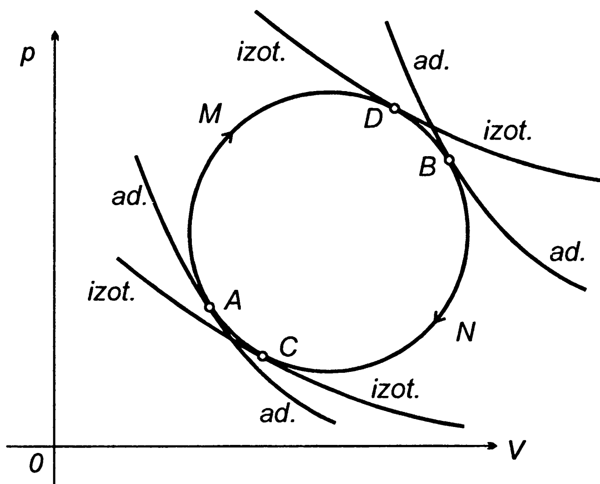


Fig.2.2.10

Rezolvare. Ducem familia de *izoterme* şi de *adiabate*. Punem în evidenţă izotermele şi adiabatele *tangente* la graficul procesului. Atunci pe porţiunea CAMD gazul se încălzeşte, iar pe porţiunea AMDB primeşte căldură, fiindcă în punctele de tangenţă A , B cu *adiabata* avem căldura schimbată $Q = 0$.

Deoarece $dQ = \nu C dT$, se vede că pe porţiunea AMD gazul primeşte căldură şi se încălzeşte, deci $C > 0$; la fel pe porţiunea BNC gazul cedează căldură şi se răceşte, deci $C > 0$. În schimb pe porţiunea DB gazul se răceşte, deşi primeşte căldură (fiindcă face lucru mecanic mai mult decât căldura primită şi energia internă scade), deci aici $C < 0$; la fel pe porţiunea CA gazul se încălzeşte, deşi cedează căldură (gazul primeşte lucru mecanic mai mult decât cedează căldură şi energia internă creşte), deci şi aici $C < 0$.

2.2.11. ***Un cilindru orizontal termoizolant de masă*** M = 3,00 kg, ***închis la capete şi aşezat pe un plan orizontal fără frecări, conține*** ν =1,00 mol ***de gaz ideal*** **diatomic.** ***La mijlocul cilindrului este în echilibru un piston termoizolant de masă*** m = 2,00 kg, ***care se poate mişca etanş fără frecări. I se imprimă cilindrului o viteză orizontală longitudinală*** v =5,0 m/s. ***Cu cât creşte temperatura gazului după stingerea oscilațiilor pistonului ?***

Rezolvare. Avem aici de fapt o ciocnire *plastică* între cilindru şi piston (cu gaz ; neglijăm masa gazului față de masa pistonului), care inițial au viteza *v* , respectiv 0, şi final au o viteză comună. Procesul de ciocnire durează până când se sting oscilațiile pistonului. În ciocnirea plastică avem o ***pierdere*** de energie cinetică a corpurilor, care se transformă în energie *internă* (a gazului):

$$Q = (1/2)\, m_r v_r^2 = (1/2)[mM/(m+M)]\, v^2 = \Delta U = \nu C_V \Delta T\,, \qquad (1)$$

unde m_r este masa *redusă* (*sau* relativă) a celor două corpuri, iar v_r este viteza *relativă* a unui corp față de celălalt ($C_V = 5R/2$) ,

$$\Delta T = [1/(2\nu C_V)]\,[mM/(m+M)]\, v^2 = 0{,}72\ \text{K}\,. \qquad (2)$$

2.2.12. ***Într-un cilindru orizontal fix se află gaz*** **diatomic,** ***la o presiune de*** n = 2,00 ori ***mai mare decât presiunea exterioară*** p_o, ***închis de un piston de masă*** M = 4,00 kg ***care se poate mişca etanş fără frecări, dar este inițial blocat. Încălzind gazul şi deblocând pistonul, acesta se deplasează*** **uniform accelerat** ***şi atinge la un moment dat viteza*** v = 10 m/s . ***Se neglijează capacitatea calorică a cilindrului şi pistonului. Aflați căldura absorbită de gaz. Cât devine această căldură dacă presiunea exterioară este neglijabilă ?***

Rezolvare. Mişcarea pistonului fiind *uniform accelerată*, forța care acționează asupra sa trebuie să fie *constantă* :

$$F = (p - p_o)S = \text{const} \rightarrow p = \text{const}\,, \qquad (1)$$

deci gazul suferă o destindere ***izobară*** : $Q = \nu C_p \Delta T$.

Conform *teoremei variației energiei cinetice*, lucrul mecanic efectuat asupra pistonului de forța rezultantă este egal cu variația energiei cinetice a acestuia :

$$(p - p_o)\Delta V = (1/2)Mv^2\,,\ \ p(1 - 1/n) = (1/2)Mv^2\,, \qquad (2)$$

dar $pV = \nu RT \rightarrow p\Delta V = \nu R\Delta T$, (p = const) , (3)

$$p(1 - 1/n)\,\nu R\Delta T/p = (1/2)Mv^2 \rightarrow \nu R\Delta T = (1/2)Mv^2 : (1 - 1/n), \qquad (4)$$

$$Q = \nu C_p \Delta T = (C_p/R)\,(1/2)Mv^2 : (1 - 1/n), \qquad (5)$$

dar $C_V = R/(\gamma - 1)\,,\quad C_p = \gamma R/(\gamma - 1)\,,$ (6)

$Q = [\gamma / (\gamma - 1)] (1/2)Mv^2 : (1 - 1/n) = 1{,}4$ kJ . (7)

Dacă presiunea exterioară este neglijabilă, înseamnă $n \to \infty$:

$Q_o = [\gamma / (\gamma - 1)] (1/2)Mv^2 = 0{,}70$ kJ . (8)

2.2.13. ***Într-un cilindru vertical, sub un piston de masă*** M = = 40 kg ***aflat la înălțimea*** h_o = 1,00 m , ***se află izolat termic de exterior, heliu de masă*** m = 0,16 g ***şi temperatură*** t = 27°C. ***Pistonul este ținut inițial fix, deasupra lui fiind*** **vid**. ***La ce înălțime finală se va stabili până la urmă pistonul dacă îl eliberăm ?***

Rezolvare. Energia *potențială* a pistonului creşte cu

$$\Delta E_p = Mg(h - h_o) . \quad (1)$$

Deoarece sistemul este *izolat adiabatic* de exterior şi deasupra pistonului este *vid* ,energia (1) se obține pe seama scăderii energiei interne a gazului :

$$\Delta E_p = - \Delta U = - \nu C_v(T' - T) , \quad (1)$$

dar în starea finală avem ecuația de stare :

$$(Mg / S) \cdot Sh = (m / \mu)RT' , \quad (2)$$

atunci din (1) rezultă : $Mg(h - h_o) =$

$= - (m/\mu) C_v [Mgh : (Rm/\mu) - T] = - (C_v / R)Mgh + (m/\mu) C_vT,$

$h = [Mgh_o + (m/\mu) C_vT] : [Mg + (C_v/R)Mg] =$

$= [h_o + m C_vT / (\mu Mg)] : (1 + C_v/R) = 55$ cm . (3)

2.2.14. ***Într-un vas închis, de volum*** V = 0,25 m³ , ***se află gaz la presiunea*** p_1 = 120 kPa. ***Gazul primeşte căldura*** Q = 8,4 kJ ***într-un proces cu căldura molară*** C = 21 J/(mol · K). ***Aflați presiunea finală.***

Rezolvare. $Q = \nu C(T_2 - T_1) = (C/R) (\nu RT_2 - \nu RT_1) =$

$= (C/R) (p_2V - p_1 V) = (CV/R) (p_2 - p_1) ,$ (1)

$p_2 = p_1 + QR / (CV) = 133{,}3$ kPa . (2)

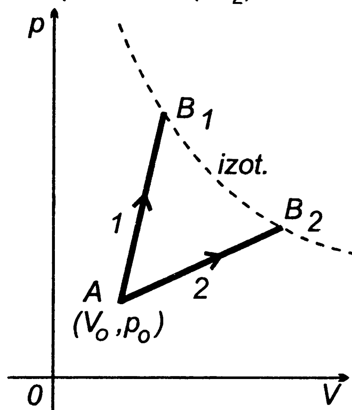
2.2.15. ***Un gaz ideal este adus dintr-o stare inițială dată prin două procese liniare diferite în stări finale de aceeaşi temperatură, ca în figură. În care din cele două procese gazul absoarbe mai multă căldură ?***

Rezolvare. Deoarece temperatura inițială şi cea finală sunt aceleaşi pentru cele două procese, variația energiei interne este aceeaşi în cele două procese :

$$Q_1 = \Delta U + L_1 , \; Q_2 = \Delta U + L_2 , \; Q_2 - Q_1 = L_2 - L_1 . \quad (1)$$

Lucrul mecanic efectuat este dat de aria (trapezului) de sub grafic :

$$Q_2 - Q_1 = (1/2)(V_2 - V_o)(p_o + p_2) - (1/2)(V_1 - V_o)(p_o + p_1) =$$
$$= (1/2)\, p_o(V_2 - V_1) + (1/2)\, V_o\,(p_1 - p_2) > 0\,,\quad (p_1V_1 = p_2V_2), \qquad (2)$$
deci în procesul 2 (AB_2) .



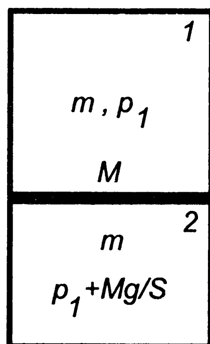


Fig.2.2.15 Fig.2.2.16

2.2.16. ***Într-un cilindru aşezat vertical se află un piston care separă două mase egale dintr-un acelaşi gaz la temperatura*** $T_1 = 300$ K. ***Pistonul se poate deplasa etanş fără frecări şi raportul volumelor este*** $r = 3{,}0$. ***Care va fi raportul volumelor dacă temperatura creşte la*** $T_2 = 400$ K ***?***

Rezolvare. Presiunea gazului de sub piston echilibrează presiunea dată de piston, *Mg / S*, plus presiunea gazului de deasupra. Deoarece avem mase egale din acelaşi gaz, scriem ecuaţiile transformării generale :

$$p_1V_1 / T_1 = (p_1 + Mg / S)(V_1/ r) / T_1 = p_1'V_1'/ T_2 =$$
$$= (p_1' + Mg / S)(V_1'/ r') / T_2\,, \qquad (1)$$
$$V_1 + V_2 = V_1' + V_2' \rightarrow V_1(1 + 1 / r) = V_1'\,(1 + 1/ r'). \qquad (2)$$

Din aceste ecuaţii rezultă :

$$p_1 = (p_1+Mg / S) : r \rightarrow p_1 = (Mg / S) : (r - 1);$$
$$p_1' = (Mg / S) : (r' - 1), \qquad (3)$$
$$(p_1 / p_1')(T_2 / T_1) = V_1'/ V_1$$
$$\rightarrow [(r' - 1) / (r - 1)]\,(T_2 / T_1) = (1 + 1/ r) / (1 + 1/ r'), \qquad (4)$$
$$r'^2 - r'\,[(r^2 - 1) / r]\,T_1/ T_2 - 1 = 0 \;\text{ sau }\; r'^2 - 2r' - 1 = 0\,,$$
$$r' = 1 \pm \sqrt{2} = 2{,}41\,. \qquad (5)$$

2.2.17. ***Un gaz ideal se destinde de la volumul*** V_1 ***până la un volum*** V_2 **: a) izobar , b) izoterm , c) adiabatic .**

a) ***Reprezentați destinderile în diagramele*** p - V, V - T, p - T.

b) ***În care destindere lucrul mecanic efectuat este*** **minim *?***

c) ***Care este semnul variației energiei interne ?***

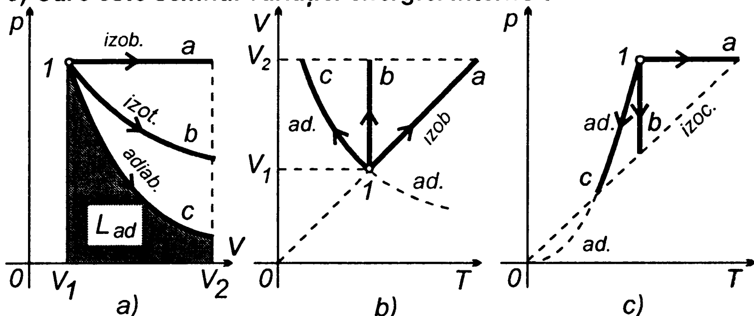


Fig.2.2.17

Rezolvare. a) V. figura , b) L este minim pe adiabată (c), c) $\Delta U > 0$ pe izobară, $\Delta U = 0$ pe izotermă , $\Delta U < 0$ pe adiabată .

2.2.18. ***O masă de gaz suferă transformarea închisă din figură. Se cunosc :*** $V_1 = 1{,}00$ L, $V_2 = 0{,}200$ L, $p_1 = 1{,}00$ atm, $p_2 = p_4$.

a) ***Aflați*** p_3 . **b)** ***Reprezentați ciclul în diagramele*** V - T , p - T .

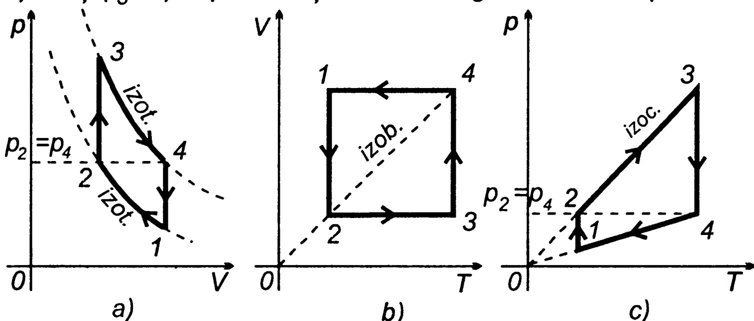


Fig.2.2.18

Rezolvare. $p_2 / p_1 = V_4 / V_3 = p_3 / p_4$, (1)

$p_2 = p_1 \cdot V_1 / V_2 = p_4$, $p_3 = p_4 \cdot V_1 / V_2 = p_1 (V_1 / V_2)^2 = 25{,}0$ atm. (2)

2.2.19. ***Un gaz ideal monoatomic*** ($C_V = 3R/2$) ***se destinde astfel încât căldura sa molară este constantă, şi efectuează un lucru mecanic*** L = 165 J. ***Apoi gazul este încălzit izocor până la temperatura inițială, absorbind căldura*** Q = 125 J. ***Aflați***

căldura molară din primul proces.

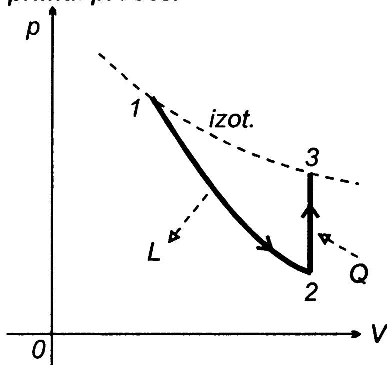


Fig.2.2.19

Rezolvare. Ca să revină *izocor* la temperatura inițială, destinderea trebuie să fie *sub* izoterma temperaturii inițiale, ca în figură. *Principiul* I al termodinamicii dă pentru procesul *1 - 2* :

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + L\ ,\quad Q_{12} = \nu C_x(T_2 - T_1)\ ,\quad \Delta U_{12} = \nu C_v(T_2 - T_1). \quad (1)$$

Dar conform enunțului :

$$T_3 = T_1 \rightarrow Q = \nu C_v(T_3 - T_2) = \nu C_v(T_1 - T_2) = -\Delta U_{12}\ , \quad (2)$$

$$Q_{12} = \nu C_x(T_2 - T_1) = -(C_x / C_v)\, Q\ , \quad (3)$$

atunci *principiul* I pentru *1 - 2* dă

$$-(C_x / C_v)\, Q = L - Q \rightarrow C_x = C_v(Q - L) / Q = -4{,}0\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)}. \quad (4)$$

Căldura molară *negativă* , $C = Q / (\nu\Delta T) < 0$, înseamnă că sistemul, deşi primeşte căldură, se răceşte, fiindcă efectuează lucru mecanic mai mult decât căldura primită, pe seama energiei sale interne, care va scădea.

2.2.20. ***O cantitate*** ν = 1,00 mol ***de gaz ideal parcurge ciclul din figură, unde*** T_1 = 400 K, ***iar procesul* 3 - 1 *este descris de ecuația*** $T = (1/2)\, T_1(3 - BV)\, BV$, ***unde*** B = const . ***Aflați lucrul mecanic efectuat de gaz pe ciclu. Reprezentați procesul şi în diagramele*** p - V , p - T .

Rezolvare. Conform figurii date :

$$T_1 = T_3 = (1/2)\, T_1(3 - BV)\, BV\ , \quad (1)$$

$$(BV)^2 - 3(BV) + 2 = 0\ ,\quad BV_1 = 1{,}00 \text{ şi } BV_3 = 2{,}00\ . \quad (2)$$

$$pV = \nu RT = \nu R\, (1/2)\, T_1(3 - BV)\, BV \rightarrow$$

$$p = (1/2)\nu R\, T_1(3 - BV)\, B\ , \quad (3)$$

prin urmare, în diagrama p - V transformarea 3 - 1 este o linie dreaptă (3).

$$p_1 = (1/2)\nu R\, T_1(3 - BV_1)\, B = \nu R\, T_1 B, \quad p_3 = (1/2)\nu R\, T_1 B. \quad (4)$$

În diagrama p - V se vede că lucrul mecanic este egal cu aria ciclului (a triunghiului) :

$$L = (1/2)(p_1 - p_3)(V_3 - V_1) = (1/2)\cdot(1/2)\nu R T_1 B \cdot (1/B) =$$
$$= (1/4)\,\nu R\, T_1 = 831\ \text{J}\,. \quad (5)$$

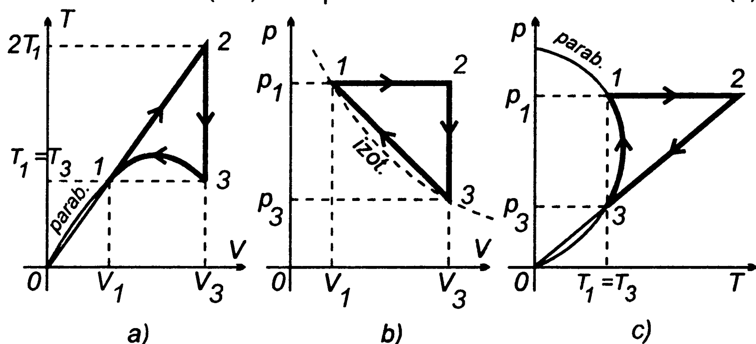


Fig.2.2.20

Pentru graficul în diagrama p - T avem din (3)

$$V = 3/B - 2p/(\nu R T_1 B^2)\ ,\ \text{atunci}$$

$$pV = \nu RT \;\rightarrow\; p\,[3/B - 2p/(\nu R T_1 B^2)] = \nu RT\,, \quad (6)$$

deci graficul este o *parabolă* care trece prin origine (T este funcție *pătratică* de p).

2.2.21. ***Un mol de gaz ideal, din starea* 1 *cu temperatura*** T_1 = 100 K, ***se destinde în vid efectuând un lucru mecanic printr-o*** **turbină, *izolat fiind termic de exterior. Gazul este adus din starea finală* 2 *în starea inițială* 1 *prin procesele din figură, unde*** $T_2 = T_3$, $\varepsilon = V_2/V_1 = 3{,}0$ ***și căldura totală absorbită*** Q = = 72 J . ***Aflați lucrul mecanic efectuat prin turbină la destinderea în vid.***

Rezolvare. Gazul fiind izolat *adiabatic*, efectuează lucru mecanic pe seama energiei sale interne :

$$L = -\Delta U = -\nu C_v(T_2 - T_1)\,. \quad (1)$$

Deoarece $T_2 = T_3$, avem

$$\Delta U_{23} = 0\ ,\ \ Q_{23} = L_{23} = -(1/2)(p_2 + p_3)(V_2 - V_1)\,, \quad (2)$$

unde lucrul mecanic este egal cu *aria* (trapez) de sub grafic .

$Q_{23} = -(1/2)(p_2V_2 - p_2V_1 + p_3V_3 - p_3V_1) = -(1/2)(p_3V_2 - p_2V_1)$, (3)
deoarece $p_2V_2 = p_3V_1$. Transcriem Q_{23} astfel:

$$Q_{23} = -(1/2)(p_2V_2\, p_3/p_2 - p_2V_2\, V_1/V_2) =$$
$$= -(1/2)\, \nu RT_2\, (p_3/p_2 - V_1/V_2) = -(1/2)\, \nu RT_2\, (\varepsilon - 1/\varepsilon)\ . \quad (4)$$
$$Q_{31} = \nu C_v(T_1 - T_3) = \nu C_v(T_1 - T_2)\ , \quad (5)$$
$$Q = Q_{23} + Q_{31} = -(1/2)\, \nu RT_2\, (\varepsilon - 1/\varepsilon) + \nu C_v(T_1 - T_2)\ , \quad (6)$$

de unde scoatem $T_2 = (\nu C_v T_1 - Q) : [\nu C_v + (1/2)\, \nu R\, (\varepsilon - 1/\varepsilon)]$, (7)
atunci lucrul mecanic (1) se poate calcula :

$$L = \nu C_v(T_1 - T_2) = [Q + (1/2)\, \nu RT_1(\varepsilon - 1/\varepsilon)] :$$
$$: [1 + R(\varepsilon - 1/\varepsilon)/(2C_v)] = 625\ \text{J}\ . \quad (8)$$

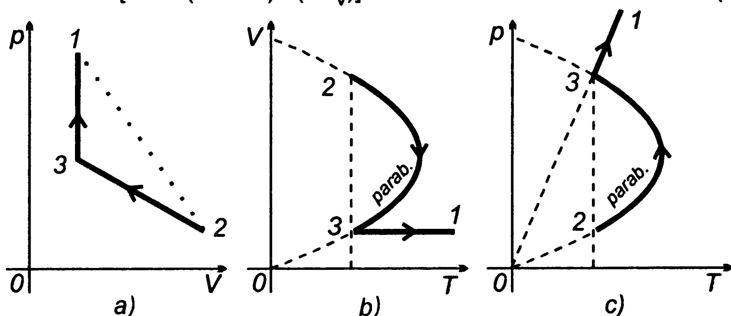


Fig.2.2.21

Pe grafic observăm că ecuația procesului *liniar 2 - 3* este de forma $p = p_o - a\,V$, deci

$$pV = \nu RT \rightarrow (p_o - a\,V)\,V = \nu RT \text{ - parabolă ,}$$
$$pV = \nu RT \rightarrow p(p_o - p)/a = \nu RT \text{ - parabolă .} \quad (9)$$

2.2.22. ***Pentru a obține un vid bun într-un vas de sticlă obişnuit de laborator, se recomandă*** **încălzirea** ***pereților de sticlă în timpul vidării pentru a evacua şi gazul adsorbit (lipit) de pereți. Evaluați cu cât ar creşte presiunea într-un vas obişnuit de laborator dacă toate moleculele adsorbite s-ar dezlipi de pereți, considerând stratul*** **monomolecular.** ***Se dă constanta*** **Boltzmann** $k = R/N_A$.

Rezolvare. Avem formulele cunoscute :

$$pV = \nu RT = (N/N_A)RT = NkT\ , \quad p = (N/V)kT = nkT\ . \quad (1)$$

Fie d - diametrul unei molecule ($d \sim 3$ Å) , atunci, dacă moleculele sunt aşezate într-un singur strat, fiecărei molecule îi va reveni

(aproximativ) un pătrat de suprafață d^2 şi deci numărul moleculelor lipite pe suprafața interioară a vasului va fi $N \approx S / d^2$, atunci,

$p = [S / (d^2 V)]kT = \{4\pi r^2 : [(4/3)\pi r^3 d^2]\}kT = [3 / (rd^2] \, kT \approx 2{,}8$ Pa,(2)

unde $r \sim 5$ cm , $T \sim 300$ K . Un vid *obişnuit* este ~ 10^{-3} torr ~ 0,1 Pa, un vid *bun* este $10^{-5}...10^{-6}$ torr ~ $10^{-3}...10^{-4}$ Pa . Prin urmare, moleculele adsorbite, dacă se dezlipesc de pe pereții vasului pot strica "serios" vidul din vas.

2.2.23. ***Calculați distanța* medie *dintre moleculele unui gaz ideal aflat în condiții* normale *de presiune şi temperatură. Se dă constanta lui* Boltzmann .**

Rezolvare. Volumul cubic care revine în medie unei molecule este $d^3 = V/N$, dar $p = (N/V)kT \rightarrow d^3 = kT/p$, (1)
unde d este chiar distanța medie dintre molecule :

$$d = \sqrt[3]{kT/p} = 3{,}3 \text{ nm} . \quad (2)$$

2.2.24. ***Un gaz ideal se destinde* adiabatic în vid *de la volumul* V_1 *la volumul* V_2*. Calculați variația* entropiei *în acest proces.***

Rezolvare. *Entropia* este o ***funcție de stare***. Pentru a afla variația de entropie între două stări de *echilibru*, putem alege orice proces *cvasistatic*, de echilibru (reversibil), care uneşte cele două stări şi să calculăm variația de entropie în acest proces; rezultatul nu depinde de procesul ales, ci numai de stările inițială şi finală.

În cazul nostru, gazul fiind izolat *adiabatic nu* schimbă căldură cu mediul şi destinzându-se în *vid*, *nu* efectuează lucru mecanic, deci $\Delta U = Q - L = 0$: variația energiei interne este zero. Dar $\Delta U = \nu C_V \Delta T$ (amintim experiența şi legea lui *J. P. Joule* 1843 cu privire la energia internă a gazului ideal), rezultă $\Delta T = 0$, adică temperatura nu se schimbă .

Acum este foarte uşor de imaginat un proces cvasistatic care să unească cele două stări, şi anume : o transformate ***izotermă***. Dar atunci variația entropiei este:

$$\Delta S = Q / T = \nu R \ln(V_2 / V_1) > 0 .$$

Procesul este *ireversibil* în sensul că sistemul nu poate reveni la starea inițială fără o intervenție specială, activă , a mediului.

Reamintim că , dacă sistemul este izolat sau adiabatic izolat, atunci pentru procesele ireversibile entropia ***creşte***. Pentru sistemul izolat entropia va creşte până ajunge la un maximum când sistemul ajunge la ***echilibru***.

2.2.25. ***Într-un tub subțire de secțiune*** $S = 4{,}00\ mm^2$ ***și lungime*** $\ell = 40{,}5\ cm$ ***, închis la un capăt și așezat orizontal, se află în echilibru o picătură de mercur de masă*** $m = 0{,}50\ g$ ***la distanța*** $\ell_0 = 20{,}3\ cm$ ***de fundul tubului. La ce turație trebuie adus* rapid *tubul pentru ca mercurul să iasă din tub ? Presiunea atmosferică este normală .***

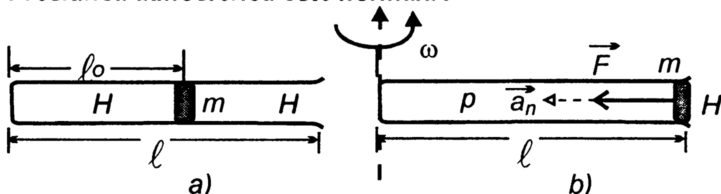


Fig.2.2.25

Rezolvare. Tubul fiind adus *rapid* la turația necesară, putem considera că aerul închis în tub nu are timp să facă schimb de căldură cu mediul exterior, deci suferă o transformare ***adiabatică***. De asemenea, vom considera că în tub presiunea este peste tot aceeași (tub scurt, turație mică).

La limită, când picătura este la marginea tubului, *lex secunda* din mecanică pentru mișcarea circulară a picăturii se scrie (pe direcție radială) : $F = (H - p)\,S = ma_n = m\omega^2\,\ell\,.$ (1)

Legea transformării **adiabatice** :

$$H(S\ell_0)^\gamma = p(S\ell)^\gamma \rightarrow p = H\,(\ell_0/\ell)^\gamma\,, \quad (2)$$

care introdus în (1) dă : $n^2 = \omega^2/(4\pi^2) =$

$$= H(1 - \ell_0^{\ \gamma}/\ell^\gamma)S : (m\ell) = 31{,}36\ \ rot^2/s^2\,,\ \ n = 5{,}6\ rot/s. \quad (3)$$

2.2.26. ***Două vase identice, izolate termic de exterior, sunt legate între ele printr-un mic tub cu robinet. În primul vas există o cantitate de gaz la presiunea*** $p = 100\ kPa$ ***și temperatura*** $t_1 = 27^oC$, ***iar în celălalt vas același gaz , la aceeași presiune, dar la temperatura*** $t_2 = 227^oC$. ***Aflați presiunea și temperatura după deschiderea robinetului și stabilirea echilibrului termic.***

Rezolvare. *Conservarea numărului de moli* dă ecuația :

$$pV/(RT_1) + pV/(RT_2) = p' \cdot 2V/(RT')\,. \quad (1)$$

Pe de altă parte, energia internă se scrie

$$\Delta U = \nu C_v \Delta T = (C_v/R)\cdot \nu R\Delta T = (C_v/R)\cdot \Delta(pV). \quad (2)$$

Energia internă a întregului gaz se conservă (nu face schimb de căldură și de lucru mecanic cu exteriorul) :

$$(C_V / R)\, p' \cdot 2V - 2(C_V / R)\, pV \;\rightarrow\; p' = p, \qquad (3)$$

atunci (1) dă :

$$T' = 2T_1T_2 : (T_1 + T_2) = 375\ \text{K} = 102^{\circ}\text{C}.$$

2.2.27. ***Într-un vas termoizolat de volum*** V = 22,4 L, ***conținând*** ν_1 = 1,00 mol ***de hidrogen la temperatura*** T_1 = 200 K , ***se introduce o masă*** m_2 = 4,0 g ***de hidrogen la temperatura*** T_2. ***După stabilirea echilibrului presiunea a devenit*** p' = 300 kPa. ***Aflați*** T_2 .

Rezolvare. *Conservarea numărului de moli* la amestecarea gazelor dă ecuația :

$$\nu_1 + m_2 / \mu = p' V / (RT'). \qquad (1)$$

Conservarea energiei interne (care depinde numai de temperatură) :

$$\nu_1 C_V T_1 + (m_2 / \mu)\, C_V T_2 = C_V \cdot p' V / R, \qquad (3)$$

$$T_2 = (p' V / R - \nu_1 T_1) : (m_2 / \mu) = 310\ \text{K}. \qquad (4)$$

2.2.28. ***În două vase termoizolate, de volume*** V_1 = 50,0 L, V_2= = 25,0 L, ***legate printr-un tub cu robinet, se află*** m_1 = 1,68 kg ***azot la presiunea*** p_1 = 3,0 MPa , ***respectiv*** m_2 = 0,120 kg Ar ***la*** p_2 = 0,50 MPa . ***Ce presiune și ce temperatură se stabilesc în vase dacă deschidem robinetul ?***

Rezolvare. *Conservarea numărului de moli* dă ecuația :

$$m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2 = p' (V_1 + V_2) / (RT'). \qquad (1)$$

Pe de altă parte, *conservarea energiei interne* dă ecuația :

$$\nu_1 C_{V1} T_1 + \nu_2 C_{V2} T_2 = \nu_1 C_{V1} T' + \nu_2 C_{V2} T'. \qquad (2)$$

Înlocuim aici numărul de moli astfel $\nu = m / \mu = pV / (RT)$:

$$C_{V1}\, p_1 V_1 / R + C_{V2}\, p_2 V_2 / R = [(m_1 / \mu_1) C_{V1} + (m_2 / \mu_2) C_{V2}]\, T' \qquad (3)$$

$$\rightarrow T' = (C_{V1}\, p_1 V_1 + C_{V2}\, p_2 V_2) : [R(C_{V1} m_1 / \mu_1 + C_{V2} m_2 / \mu_2)] = 306\ \text{K}. \qquad (4)$$

Atunci (1) dă :

$$p' = (m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2)\, RT' : (V_1 + V_2) = 2{,}10\ \text{MPa}. \qquad (5)$$

2.2.29. ***Un cilindru orizontal termoizolat de volum*** V_0= 10,0 L , ***umplut cu heliu, este împărțit în două compartimente printr-un piston termoizolant, care se poate mișca etanș fără frecări. Se comunică gazului din vasul*** V_1 ***o cantitate de căldură*** Q = 100 J. ***Aflați cu cât crește presiunea în vase după stabilirea echilibrului.***

Rezolvare. Scriem *ecuația de stare* pentru fiecare vas :

$$pV_1 = (m_1 / \mu)RT, \quad pV_2 = (m_2 / \mu)RT\ ; \qquad (1)$$

$$(p + \Delta p)(V_1 + \Delta V) = (m_1 / \mu)RT_1,\ (p + \Delta p)(V_1 - \Delta V) = (m_2 / \mu)RT_2. \qquad (2)$$

Adunăm ecuațiile (1) între ele şi ecuațiile (2) între ele :

$$pV_0 = (m_1/\mu + m_2/\mu)RT\,,\ (p+\Delta p)V_0 = (m_1/\mu)RT_1 + (m_2/\mu)RT_2 \quad (3)$$

$$\rightarrow \Delta pV_0 = (m_1/\mu)R(T_1 - T) + (m_2/\mu)R(T_2 - T)\,. \quad (4)$$

Scriem *principiul* I al termodinamicii pentru gazul din vasul *1* :

$$Q = \Delta U_1 + L_1 \quad (5)$$

şi pentru vasul *2* : $0 = \Delta U_2 - L_1$ (6)

$$\rightarrow\ Q = \Delta U_1 + \Delta U_2 = (m_1/\mu)C_v(T_1 - T) + (m_2/\mu)C_v(T_2 - T)\,. (7)$$

Folosim această ecuație în (4) :

$$\Delta pV_0 = QR/C_v \rightarrow \Delta p = (R/C_v)(Q/V_0) = (2/3)\,Q/V_0 = 6{,}67 \text{ kPa}\,, \quad (8)$$

unde pentru gaze *monoatomice* $C_v = 3R/2$.

2.2.30. ***Un cilindru vertical izolat termic este despărțit în două părți printr-un perete fix, conductor de căldură. Deasupra peretelui se află*** $\nu_1 = 1{,}00$ mol ***de gaz monoatomic la temperatura*** $T_1 = 420$ K ***închis cu un piston de masă*** M = 10,0 kg ***şi secțiune*** S = 90 cm^2, ***care se poate mişca etanş fără frecări. În partea inferioară, sub perete, se află*** $\nu_2 = 1{,}50$ mol ***din acelaşi gaz la temperatura*** $T_2 = 400$ K. ***Cu cât coboară pistonul şi care va fi temperatura finală la echilibru ? Presiunea atmosferică este*** H = 100 kPa.

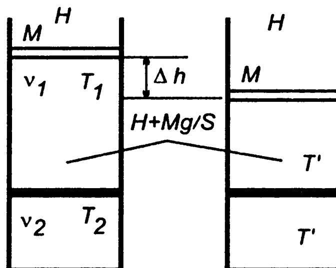


Fig.2.2.30

Rezolvare. Gazul de sub piston se află la presiune constantă, deci suferă o transformare *izobară*. Căldura cedată de gazul *1* gazului *2* :

$$\nu_1 C_p(T_1 - T') = \nu_2 C_v(T' - T_2)\,. \quad (1)$$

Pe de altă parte *principiul* I al termodinamicii pentru gazul *1* :

$$Q_1 = \nu_1 C_p(T' - T_1) = \Delta U_1 + L_1 = \nu_1 C_v(T' - T_1) + p\Delta V =$$

$$= \nu_1 C_v(T' - T_1) + (H + Mg/S)\cdot S\Delta h\,. \quad (2)$$

Din ecuația (1) obținem (la gazele *monoatomice* $C_p/C_v = \gamma = 5/3$):

$$T' = (\nu_1 C_p T_1 + \nu_2 C_v T_2) : (\nu_1 C_p + \nu_2 C_v) =$$

$$= (\nu_1\gamma T_1 + \nu_2 T_2) : (\nu_1\gamma + \nu_2) = 410{,}5 \text{ K}\,. \quad (3)$$

Din ecuațiile (1) şi (2) avem

$$-\nu_2 C_V(T' - T_2) = \nu_1 C_V(T' - T_1) + (H + Mg/S) \cdot S\Delta h, \quad (4)$$

$$\Delta h = -[1 : (HS + Mg)]\ \nu_1\nu_2 R(T_1 - T_2) : (\nu_1\gamma + \nu_2) = -8{,}0 \text{ cm} \quad (5)$$

(pistonul coboară) .

2.2.31. ***Un tub cilindric orizontal închis, de secțiune*** S, ***este împărțit în*** n ***compartimente egale cu ajutorul a*** n - 1 ***pistoane, care se pot mişca etanş fără frecări. Inițial presiunea în toate compartimentele este aceeaşi*** p. ***Aflați presiunea din fiecare compartiment când tubul este adus în poziție verticală, precum şi masele pistoanelor, ştiind că în acest caz volumele celor*** n ***compartimente se raportă între ele ca primele*** n ***numere naturale.***

Rezolvare. Conform enunțului :

$$V_1 : V_2 : V_3 : ... : V_n = 1 : 2 : 3 : ... : n \rightarrow V_k = k\,V_1, \quad (1)$$

dar $V = V_1 + V_2 + ... + V_n = V_1(1 + 2 + ... + n) = (1/2)n(n + 1)V_1$. (2)

Gazele din fiecare compartiment suferă o transformare *izotermă* :

$$p\,V/n = p_k V_k \rightarrow p_k = p(n + 1)/(2k) = p_1/k\ ,\ p_1 = p(n + 1)/2\ . \quad (3)$$

Dar diferența de presiune dintre două compartimente vecine (în poziția verticală a cilindrului, când V_1 este jos, iar V_n este sus) se datorează presiunii pistonului respectiv:

$$p_k = p_{k+1} + m_k g/S\ . \quad (4)$$

Folosind (3) găsim de aici masele pistoanelor :

$$p_1/k = p_1/(k + 1) + m_k g/S \rightarrow m_k = (Sp/g)(n + 1)/[2k(k + 1)]. \quad (5)$$

2.2.32. ***Două pompe de vid de aceeaşi turație videază un volum*** V = 1,00 L ***de la presiunea inițială*** H , ***până la aceeaşi presiune finală*** p , ***conform graficelor din figură în care*** tg α = = 0,50 , tg β = 1,00. ***Volumul de lucru el primei pompe este*** v_1 = = 100 cm³. ***Aflați volumul de lucru al pompei*** **2** .

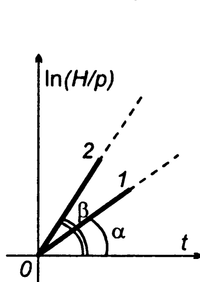


Fig.2.2.32

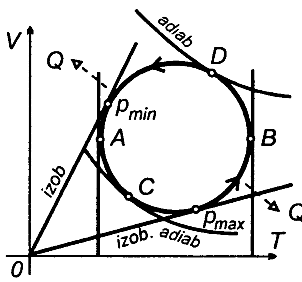


Fig.2.2.33

Rezolvare. La prima tură a pompei aerul din vasul V se destinde *izoterm* de la volumul V la $V + v$ şi presiunea devine

$$p_1 = H \cdot V/(V+v)\,, \tag{1}$$

după care se evacuează volumul de aer v la această presiune.

La a două tură aerul din V, aflat acum la presiunea p_1, se destinde din nou, analog, de la V la $V + v$ şi presiunea devine:

$$p_2 = p_1 \cdot V/(V+v) = H\,[V/(V+v)]^2\,,\ldots,\, p_N = H\,[V/(V+v)]^N \tag{2}$$

sau

$$p(t) = H\,[V/(V+v)]^{nt},\quad \ln(H/p) = nt \cdot \ln[(V+v)/v]\,. \tag{3}$$

De aici se vede că *pantele* dreptelor din figură sunt

$$\text{tg}\,\alpha = n\ln(1 + v_1/V)\,,\qquad \text{tg}\,\beta = n\ln(1 + v_2/V)\,, \tag{4}$$

de unde rezultă : $\quad (1 + v_1/V)^{\text{tg}\beta} = (1 + v_2/V)^{\text{tg}\alpha}$,

$$v_2 = V\,[(1 + v_1/V)^{\text{tg}\beta/\text{tg}\alpha} - 1] = 210\ \text{cm}^3\,. \tag{5}$$

2.2.33. ***Un proces parcurs de gaz perfect este reprezentat în diagrama* V-T *printr-un cerc, parcurs în sens trigonometric. Arătaţi grafic pe ce porţiune a ciclului gazul :* a) *are presiune maximă, respectiv minimă,* b)*efectuează lucru mecanic pozitiv,* c) *primeşte căldură* , d) *are căldură specifică* negativă .**

Rezolvare. Observăm că în diagrama V - T adiabata seamănă cu cea din diagrama p - V.

Ducem familia de *adiabate* ; două adiabate vor fi tangente la ciclu, acolo: $Q = 0$. Pe porţiunea CBD gazul primeşte căldură ($dQ = TdS > 0$), iar pe porţiunea DAC cedează căldură ($dQ = TdS < 0$). Pe porţiunea BD (respectiv AC) căldura specifică $C = Q/(\nu\Delta T)$ este *negativă*, deoarece gazul, deşi primeşte căldură ($Q > 0$), se răceşte, $\Delta T < 0$, aceasta înseamnă că efectuează mai mult lucru mecanic decât căldura primită, pe seama scăderii energiei interne (de aceea scade temperatura).

Din ecuaţia de stare avem

$$V = [mR/(\mu p)] \cdot T\,, \tag{1}$$

deci *panta* izobarelor este *invers* proporţională cu presiunea.

Lucrul mecanic este pozitiv pe porţiunea pe care creşte volumul ($\Delta V > 0$).

2.2.34. ***Un gaz ideal parcurge ciclul din figură. Se dau :*** $t_1 = 27^oC$, $V_1 = 5{,}0$ L , $t_3 = 127^oC$, $V_3 = 6{,}0$ L ***şi volumul*** V_1 ***în condiţii* normale *:*** $V_{1o} = 10{,}0$ L. ***Aflaţi lucrul mecanic efectuat de gaz într-un ciclu. Reprezentaţi ciclul şi în diagramele*** p - V , p - T .

Rezolvare. Transformările *izobară 4 - 1* şi *izocoră 3 - 4* dau:

$V_3 / V_1 = V_4 / V_1 = T_4 / T_1$;

$p_2 / p_1 = p_3 / p_4 = T_3 / T_4 = T_3 / (T_1 V_3 / V_1)$. (1)

Lucrul mecanic efectuat este egal cu aria ciclului în diagrama p - V:

$L = (p_2 - p_1)(V_3 - V_1) = [p_1\ T_3 V_1 / (T_1 V_3) - p_1](V_3 - V_1) =$

$= (p_1 V_1 / T_1)(T_3 / V_3 - T_1 / V_1)(V_3 - V_1) =$

$= (p_o V_{1o} / T_o)(\ T_3 / V_3 - T_1 / V_1)(V_3 - V_1) = 24{,}7$ J , (2)

unde am adus produsul $p_1 V_1 / T_1$ la condiţii *normale* de presiune şi temperatură (altfel nu-l cunoaştem pe p_1).

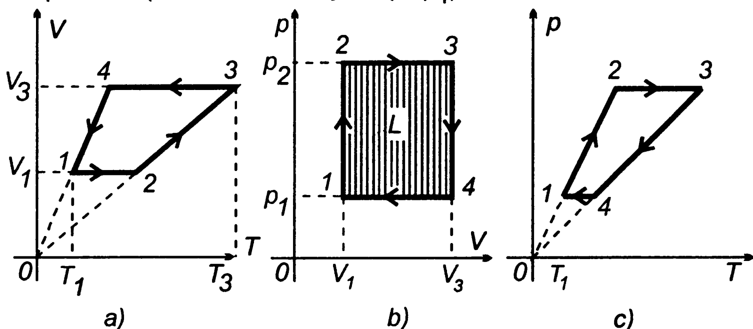


Fig.2.2.34

2.2.35. ***Un mol de gaz ideal aflat iniţial la temperatura*** T_1 **şi presiunea** p_1, ***se destinde după legea*** $T = aV - bV^2$, a, b = **constante date.** ***Se cunoaşte exponentul adiabatic*** γ ***şi constanta*** R. ***Aflaţi căldura absorbită dacă volumul final*** $V_2 = nV_1$, $n > 1$.

Rezolvare. Conform *ecuaţiei de stare*:

$pV = \nu RT = \nu R\,(aV - bV^2) \rightarrow p = \nu R\,(a - bV)$, (1)

ceea ce se reprezintă printr-o linie *dreaptă* în diagrama p - V. *Lucrul mecanic este dat de aria de sub graficul procesului în dia-grama p - V* (trapezul din figură) :

$L = (1/2)\,(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = (1/2)\,\nu R(2a - bV_1 - bV_2)(\ V_2 - V_1)$. (1)

Variaţia energiei interne este

$\Delta U = \nu C_v \Delta T = [\nu R / (\gamma - 1)][a(V_2 - V_1) - b(V_2^2 - V_1^2)]$, (2)

unde $C_v = R / (\gamma - 1)$, $C_p = \gamma R / (\gamma - 1)$, $C_p - C_v = R$, $\gamma = C_p / C_v$. (3)

Căldura absorbită se obţine din *principiul* I

$Q = \Delta U - L = [\nu R / (\gamma - 1)]\,(V_2 - V_1)[a - b(V_1 + V_2)] -$

$- \nu R\,(V_2 - V_1)[a - b(V_1 + V_2) / 2]$. (4)

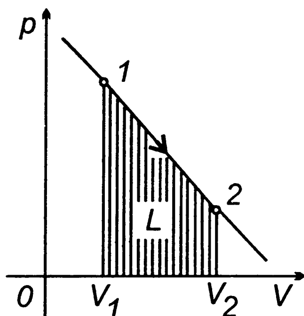


Fig.2.2.35

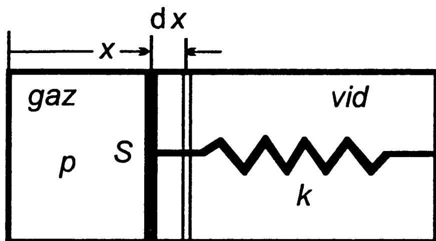


Fig.2.2.37

(*) **2.2.36.** ***Aflați căldura molară a unui gaz într-un proces descris de ecuația*** $p = a\sqrt{T}$, ***unde*** a = const. ***Se cunoaşte*** C_V ***Reprezentați procesul în diagramele*** p - V , V - T , p - T .

Rezolvare. Prin definiție $C = dQ : (\nu dT)$, dar $dQ = dU + pdV$:

$$C = (dU + pdV) / (\nu dT) = (\nu C_V dT + pdV) / (\nu dT) = C_V + pdV / (\nu dT), \quad (1)$$

dar $V = \nu RT / p = \nu R\sqrt{T} / a$, de unde derivata cerută de (1) :

$$dV / dT = (\nu R / a) \cdot [1 : (2\sqrt{T})] , \quad (2)$$

care introdusă în (1) dă :

$$C = C_V + (p / \nu) \cdot (\nu R / a) \cdot [1 : (2\sqrt{T})] = C_V + R / 2 . \quad (3)$$

Dealtfel procesul dat este o ***politropă*** : $p = \text{const} \cdot \sqrt{pV}$ sau ridicând la pătrat : $pV^{-1} = \text{const}$, deci $k = -1$ (4)

şi conform problemei 2.2.47 :

$$C = C_V + R / (1 - k) = C_V + R / 2 . \quad (5)$$

Graficele procesului sunt la fel ca la problema 2.2.45.

Dealtfel, procesul (4) se reprezintă în diagrama p - V printr-o ***dreaptă*** trecând prin origine, deci lucrul mecanic se calculează ca ***aria*** trapezului de sub grafic. Mai departe se poate judeca elementar, ca la problema 2.2.45.

(*) **2.2.37.** ***Cilindrul din figură conține gaz perfect cu căldura molară*** C_V ***cunoscută, pistonul se deplasează etanş fără frecări, iar lungimea resortului nedeformat este egală cu lungimea cilindrului. Aflați căldura molară a gazului în aceste condiții, neglijând capacitatea calorică a cilindrului, pistonului şi resortului.***

Rezolvare. Condiția de *echilibru* a pistonului $pS = kx$ (1)

dă prin *diferențiere* $Sdp = kdx$. (2)

Să prelucrăm expresia căldurii absorbite :

$dQ = dU + dL = \nu C_V dT + pSdx = \nu C_V dT + kxdx$, (3)

$\nu R dT = d(p \cdot Sx) = Sxdp + Spdx = 2kxdx$,

de unde $kxdx = (1/2)\, \nu R dT$ (4)

şi atunci $dQ = \nu C_V dT + (1/2)\, \nu R dT = \nu(C_V + R/2)\, dT$, (5)

de unde prin definiție : $C = dQ/(\nu dT) = C_V + R/2$. (6)

Dealtfel gazul suferă o transformare ***politropică*** :

$pS = kx = (k/S)\, V$ sau $pV^{-1} = k/S^2 = \text{const}$, deci $k = -1$ (7)

şi conform problemei 2.2.47: $C = C_V + R/(1 - k) = C_V + R/2$. (8)

Graficele sunt aceleaşi ca la problema 2.2.45.

Procesul (7) se reprezintă în diagrama p - V printr-o ***dreaptă*** trecând prin origine, deci lucrul mecanic se poate calcula ca ***aria*** trapezului de sub grafic. Mai departe, judecând cu variații mici ΔT, Δx , etc., putem obține rezultatul fără a folosi derivate.

(*) **2.2.38.** ***Într-un cilindru vertical sub piston se află gaz diatomic perfect. Pistonul are masa*** M = 10,0 kg, ***aria*** S =100 cm^2 ***şi se mişcă etanş fără frecări. Ce cantitate de căldură pe unitatea de timp trebuie comunicată gazului pentru ca pistonul să se deplaseze cu viteza*** v = 0,40 m/s ? ***Presiunea atmosferică este*** p_o = 100 kPa .

Rezolvare. Transformarea este ***izobară*** la presiunea

$p = p_o + Mg/S = \text{const.}$ (1)

$dQ = \nu C_p\, dT = (C_p/R)\, \nu R\, dT = (C_p/R) p dV =$

$= (C_p/R) \cdot pSvdt = (C_p/R)\,(p_oS + Mg)\, vdt$, (2)

de unde căldura pe unitate de timp : $dQ/dt =$

$= (C_p/R)\,(p_oS + Mg) \cdot v = [\gamma/(\gamma - 1)]\,(p_oS + Mg)\, v = 1{,}54$ kJ/s (3)

$(R = C_p - C_V ,\quad \gamma = C_p/C_V)$.

Problema se poate rezolva foarte uşor şi fără derivate, judecând cu variații mici :

$Q = \nu C_p\, \Delta T = (C_p/R) \cdot p\Delta V = (C_p/R) \cdot pSv\Delta t$,

$Q^* = Q/\Delta t = (C_p/R) \cdot pSv = (C_p/R)\,(p_oS + Mg) \cdot v$, etc.

* **2.2.39.** ***Un gaz perfect se destinde după legea*** pV^2 = const. ***Aflați căldura molară în această transformare.***

Rezolvare. Plecăm de la definiția căldurii molare şi folosim *principiul* I : $C = dQ/(\nu dT) = (dU + pdV)/(\nu dT) =$

$= (\nu C_V dT + pdV)/(\nu dT) = C_V + pdV/(\nu dT)$, (1)

dar $pV^2 = \text{const} = pV \cdot V = \nu RT \cdot V = \text{const}$ sau $TV = \text{const}$, (2)

care, prin derivare *logaritmică* (întâi logaritmăm , apoi diferențiem), dă $dT/T + dV/V = 0$ sau $dV/dT = -V/T$ (3)

şi introdus în (1), dă $C = C_V - pV/(\nu T) = C_V - R$. (4)

Dealtfel, transformarea dată este ***politropică*** cu exponentul (indicele) politropic $k = 2$ şi conform problemei 2.2.47 :

$$C = C_V + R/(1-k) = C_V - R. \quad (5)$$

∗ 2.2.40. ***Un gaz monoatomic perfect suferă următoarele transformări : 1-2 izobară cu*** $V_2 = nV_1$, $n = 1{,}5$; ***2-3 după legea*** $p = \text{const} \cdot V$ ***cu*** $V_3 = V_2/k$, $k = 3{,}0$; ***3-4 izobară cu*** $V_4 = V_1$ ***şi 4-1 izocoră. Ştiind căldura cedată*** $|Q_{23}|$ ***aflați căldura absorbită*** Q_{41} . ***Reprezentați ciclul în diagramele*** p - V, V - T , p - T.

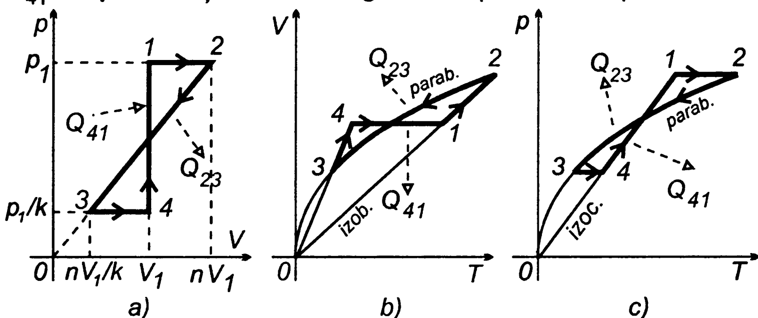


Fig.2.2.40

Rezolvare. Să calculăm căldura molară în transformarea *2-3*, a cărei ecuație este $p = \text{const} \cdot V$. Atunci ecuația de stare dă :

$$pV = \nu RT, \quad \text{const} \cdot V^2 = \nu RT, \quad (1)$$

de unde derivata *logaritmică* :

$$2\,dV/V = dT/T, \quad dV/dT = V/(2T). \quad (2)$$

Căldura molară este prin definiție : $C = dQ/(\nu dT) =$

$= (dU + pdV)/(\nu dT) = (C_V dT + pdV)/(\nu dT) = C_V + pdV/(\nu dT) =$

$= C_V + pV/(2\nu T) = C_V + R/2 = 2R$, $(C_V = 3R/2)$. (3)

Dealtfel, transformarea *2 - 3* este ***politropică*** : $pV^{-1} = \text{const}$, deci $k = -1$, şi conform problemei 2.2.47 :

$$C = C_V + R/(1-k) = C_V + R/2. \quad (4)$$

$|Q_{23}| = \nu C(T_2 - T_3) = 2(\nu RT_2 - \nu RT_3) = 2(p_1 nV_1 - p_1 nV_1/k^2) =$

$= 2p_1V_1(k^2 - 1)\,n/k^2$, (5)

de unde $\qquad p_1V_1 = |\,Q_{23}\,|\,k^2 : [2n(k^2 - 1)]\,.$ (6)

$$Q_{41} = \nu C_v(T_1 - T_4) = \nu\,(3R/2)(T_1 - T_4) = (3/2)(\,p_1V_1 - p_1V_1/k) =$$
$$= (3/2)[(k - 1)/k]\,p_1V_1 = (3/2)[(k - 1)/k]\,|Q_{23}|k^2 : [2n(k^2 - 1)] =$$
$$= (3/4)\,|Q_{23}| \cdot k : [n(k + 1)] = (3/8)\,|Q_{23}|\,. \qquad (7)$$

Fie $p = a \cdot V$ ecuația transformării *2 - 3*, atunci ecuația de stare devine :

$pV = a \cdot V^2 = \nu RT$ - parabolă ; $\qquad pV = p^2/a = \nu RT$ - parabolă (8)

(V. figura) .

∗ 2.2.41. ***Un gaz perfect suferă o transformare descrisă de ecuația*** $p = p_o - aV$, ($p_o > 0$, $a > 0$ - ***constante***). ***Pe ce porțiune a transformării:*** **a)** ***gazul se încălzeşte, respectiv se răceşte ?*** **b)** ***gazul primeşte căldură, respectiv cedează căldură ? Trasați graficele corespunzătoare.***

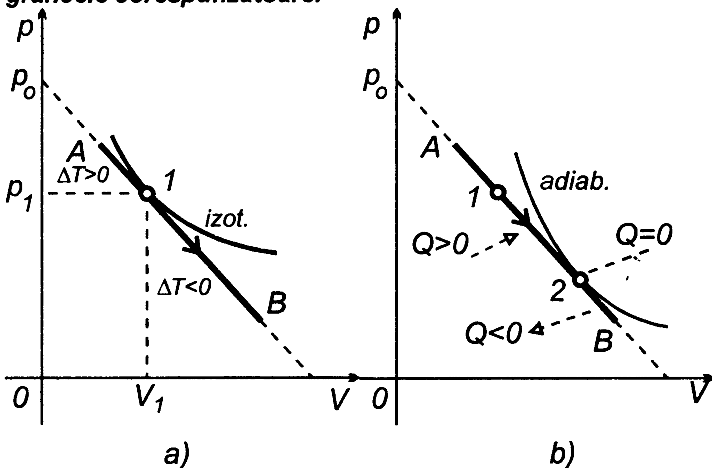


Fig.2.2.41 a, b

Rezolvare. a) Dacă intersectăm graficul procesului cu familia de *izoterme*, atunci se vede că în procesul de la A la B temperatura creşte, atinge un maxim $T_{max} = T_1$ într-un punct *1* , apoi scade. Punctele de intersecție dintre graficul procesului şi graficul izotermei sunt rădăcinile sistemului :

$$p = p_o - aV\,, \quad pV = \nu RT\,, \quad (T \text{ - parametru}) \qquad (1)$$

sau înlocuind p din prima ecuație în a doua :

$$aV^2 - p_oV + \nu RT = 0, \qquad (2)$$

deci pentru T dat sunt *două* puncte de intersecție : reale distincte, reale confundate sau complex conjugate. Punctul *1* cu T_{max} corespunde rădăcinii *duble* când izoterma este *tangentă* la graficul procesului, deci *discriminantul* ecuației (2) trebuie să fie zero :

$$D = p_o^2 - 4\nu aRT = 0\ , \qquad (3)$$

de unde $\quad T_{max} = T_1 = p_o^2 : (4\nu aR)\ , \qquad (4)$

apoi din (2): $\quad V_1 = p_o/(2a)\ , \quad p_1 = p_o/2\ . \qquad (5)$

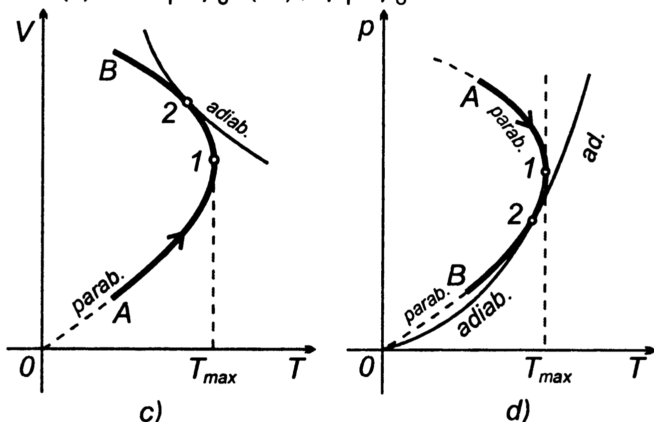


Fig.2.2.41 c, d

Se poate judeca şi altfel : Scoatem temperatura T din (2) :

$$T = (p_oV - aV^2)/(\nu R) = f(V)\ . \qquad (6)$$

Extremele unei funcții corespund *rădăcinilor* derivatei, deci anulăm derivata : $\quad T'(V) = f'(V) = (p_o - 2aV)/(\nu R) = 0\ , \qquad (7)$

de unde $\quad V_1 = p_o/(2a)$, etc.

Natura extremului se obține din *semnul* derivatei *a doua* (sau din *variația* semnului derivatei întâia) : $f''(V) = (-2a)/(\nu R) < 0\ , \qquad (8)$
deci extremul este un *maxim* .

b) Să căutăm punctul în jurul căruia, într-un proces *elementar*, $dQ = 0 : dQ = dU + pdV = \nu C_v dT + pdV = 0\ . \qquad (9)$

Diferențiem ecuația procesului (1) şi ecuația de stare :

$$dp = -adV\ , \qquad \nu RdT = pdV + Vdp = pdV + V(-adV) =$$
$$= (p - a)\, dV = (2p - p_o)dV,\ \text{de unde}\ dV = \nu RdT : (2p - p_o)\ . \quad (10)$$

Acum ecuația (9) devine :

$$dQ = \nu C_v dT + p\,[\nu R/(2p - p_o)]\, dT = \nu[C_v + pR/(2p - p_o)]\, dT = 0, \quad (11)$$

de unde $C_v + pR/(2p - p_o) = 0$ sau

$$p_2 = p_o : [2 + R/C_v] = p_o/(1+\gamma)\,, \quad (R = C_p - C_v)\,. \qquad (12)$$

Din ecuația procesului rezultă acum V_2:

$$V_2 = (p_o - p_2)/a = [\gamma/(1+\gamma)]\, p_o/a \qquad (13)$$

şi din ecuația de stare:

$$T_2 = p_2V_2 : (\nu R) = [\gamma/(1+\gamma)^2]\, p_o^2/(\nu a R)\,. \qquad (14)$$

Alt mod: Deoarece pe adiabată $Q = 0$, punctul *2* trebuie să fie punctul de *tangență* al unei adiabate cu graficul procesului, astfel încât pe o porțiune *infinitezimală* cele două curbe să coincidă şi acolo să nu se facă schimb de căldură, deci intersecția unei adiabate $pV^{\gamma} = b$ cu curba procesului $p = p_o - aV$ trebuie să dea două puncte *confundate* (condiția de tangență !), prin urmare ecuația

$$f(V) = (p_o - aV)\cdot V^{\gamma} - b = 0 \qquad (15)$$

trebuie să aibă rădăcină *dublă* în V, deci *derivata* funcției $f(V)$ trebuie să aibă rădăcină *simplă*: $f'(V) =$

$$= \gamma p_o V^{\gamma-1} - a(\gamma+1)V^{\gamma} = 0 \ \text{ sau } \ V^{\gamma-1}[\gamma p_o - a(\gamma+1)V] = 0, \qquad (16)$$

de unde regăsim rezultatul anterior: $V_2 = [\gamma/(1+\gamma)]\, p_o/a$, etc .(17)

Conform formulelor (5) şi (12):

$$p_1 = p_o/2 > p_2 = p_o/(1+\gamma)\,, \ (\text{totdeauna } \gamma > 1)\,, \qquad (18)$$

deci cele două puncte *nu coincid*, punctul *1* fiind mai sus de punctul *2*. De la *1* la *2* gazul se destinde şi se răceşte, deşi primeşte căldură (căldura specifică este *negativă* !), efectuând un lucru mecanic mai mare decât căldura primită, pe seama scăderii energiei interne.

Graficele procesului *liniar* A - B în diagramele $V - T$ şi $p - T$ sunt *parabole*.

O altă cale de a găsi punctul 2 este de a folosi noțiunea de **entropie**, aşa cum se face în problema 2.3.28.

* **2.2.42.** ***Aflați căldura molară a unui gaz perfect în procesul*** $p = aV^n$, ***ştiind căldura sa molară izocoră şi constanta*** R.

Rezolvare. $dQ = dU + pdV = \nu C_v dT + aV^n dV$, (1)

dar $\nu RT = pV = aV^{n+1}$ (2)

care prin diferențiere dă $\nu R dT = a(n+1)V^n dV$ (3)

şi introducând în (1): $dQ = \nu C_v dT + \nu R dT/(n+1) =$

$$= \nu[C_v + R/(n+1)]\, dT = \nu C dT\,, \qquad (4)$$

de unde rezultă căldura molară (prin definiție):

$$C = dQ/(\nu dT) = C_v + R/(n+1)\,. \qquad (5)$$

Dealtfel, transformarea dată este ***politropică*** : pV^{-n} = const, $k = -n$, şi conform problemei 2.2.47 :

$$C = C_V + R/(1-k) = C_V + R/(n+1) . \qquad (6)$$

*** 2.2.43. *Într-un cilindru vertical de secţiune*** S ***se află gaz închis de un piston de masă*** m , ***situat , la echilibru, la înălţimea*** h . ***Presiunea atmosferică este*** p_0. ***Aflaţi perioada micilor oscilaţii ale pistonului considerând că procesul poate fi aproximat de o politropă*** pV^k = const .

Rezolvare. Oscilaţiile fiind ***mici***, variaţiile de volum şi de presiune sunt *foarte mici* şi le putem calcula ***ca diferenţiale*** .

Ecuaţia ***politropei*** $pV^k = \text{const}$ (1)

dă prin derivare *logaritmică* (întâi logaritmăm, apoi diferenţiem):

$$dp/p + k\,dV/V = 0 , \quad dp = -k\,(p/V)\,dV , \qquad (2)$$

deci pentru variaţii foarte *mici* : $\Delta p = -k\,(p/V)\,\Delta V$. (3)

Notând cu x elongaţia (foarte mică) a pistonului de la poziţia sa de **echilibru**, avem $\Delta V = S \cdot x$, deci

$$\Delta p = -k(pS/V)\cdot x \cong -(k\,p/h)\,x \cong -(k/h)(p_0 + mg/S)\,x , \qquad (4)$$

$$F = \Delta p \cdot S = -(k/h)(p_0 S + mg)\cdot x = -C\,x , \qquad (5)$$

deci forţa este de tip **elastic** cu constanta **cvasielastică** :

$$C = (k/h)(p_0 S + mg) , \qquad (6)$$

prin urmare, perioada ***micilor oscilaţii*** :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{mh}{p_0 S + mg}\frac{1}{k}} , \quad k > 0. \qquad (7)$$

În particular, pentru oscilaţii mici *adiabatice* : $k = \gamma$.

(* *)2.2.44. *Un gaz diatomic perfect se destinde după legea* p = = aV, ***unde*** a = 1,00 · 10^8 N/m^5 , ***de la un volum*** V_1 = 1,00 L ***până la un volum*** V_2 = 2,00 L. ***Calculaţi :* a) *lucrul mecanic efectuat de gaz,* b) *variaţia energiei interne,* c) *căldura absorbită şi căldura molară în această transformare.***

Rezolvare. a) $L = \int dL = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} aV\,dV = \frac{1}{2}a\left(V_2^2 - V_1^2\right) =$

$$= 150 \text{ J} . \qquad (1)$$

Ştiind interpretarea *geometrică* a lucrului mecanic efectuat de un gaz la destindere, putem calcula foarte uşor, fără integrale, lucrul mecanic în cazul procesului nostru care se reprezintă printr-o linie *dreaptă* care trece prin origine în diagrama p - V şi deci lucrul mecanic este egal cu ***aria*** trapezului de sub graficul procesului.

b) $\Delta U = \nu C_v(T_2 - T_1) = (C_v / R)(\nu RT_2 - \nu RT_1) =$
$= (C_v / R)(p_2V_2 - p_1V_1) = (C_v / R)a(V_2^2 - V_1^2) =$
$= (C_v / R) \cdot 2L = 5L = 750$ J , $(C_v = 5R/2)$. (2)

c) $Q = \Delta U + L = 900$ J , $\Delta U = \nu C_v \Delta T$, (3)

dar din (2) : $L = \Delta U \cdot R / (2C_v)$, rezultă atunci

$$Q = \nu C_v \Delta T[1 + R / (2C_v)] = \nu C \Delta T , \quad (4)$$

prin urmare,

$$C = Q / (\nu \Delta T) = C_v + R/2 = 3R = 24{,}9 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} . \quad (5)$$

Dealtfel procesul este *politropic* : $pV^{-1} = a = \text{const}$, $k = -1$, atunci (v. problema 2.2.47):

$$C = C_v + R / (1 - k) = C_v + R/2 = 3R . \quad (6)$$

(* *)2.2.45. *O masă* m *de gaz perfect cu masa molară* μ *suferă un proces descris de legea* T ~ p², de la T₁ la T₂. *Aflați lucrul mecanic efectuat de gaz şi căldura molară în această transformare. Reprezentați procesul în diagramele* p - V, V - T , p - T .

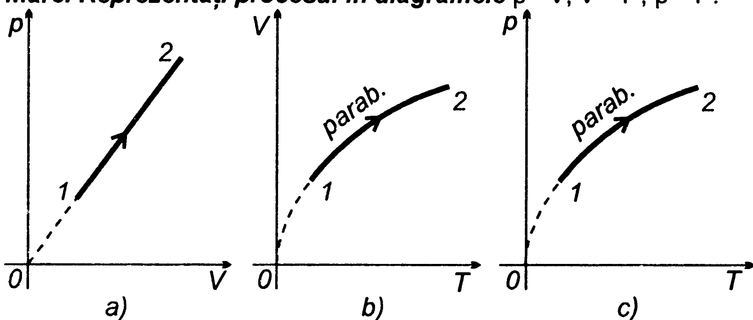


Fig.2.2.45

Rezolvare. $T = ap^2$, deci $pV = (m / \mu)R \cdot ap^2$

sau $V = (m / \mu)R\, ap$, (1)

care prin diferențiere dă: $\mathrm{d}V = (m / \mu)R\, a\mathrm{d}p$. (2)

Atunci $L = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V = \int_{p_1}^{p_2} p\frac{m}{\mu}Ra\mathrm{d}p = [mRa / (2\mu)](p_2^2 - p_1^2) =$

$= [mR / (2\mu)](ap_2^2 - ap_1^2) = [mR / (2\mu)]\,(T_2 - T_1)$,

deci $\mathrm{d}L = (1/2)\nu R\mathrm{d}T$, $\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}L = \nu C_v \mathrm{d}T + (1/2)\nu R\mathrm{d}T$, (4)

de unde prin definiție $C = \mathrm{d}Q / (\nu \mathrm{d}T) = C_v + R/2$. (5)

Dealtfel transformarea dată este o ***politropă*** : $Tp^{-2} = \text{const}$ sau

$$pV \cdot p^{-2} = \text{const} \text{ sau } pV^{-1} = \text{const}, \quad k = -1 \qquad (6)$$
şi conform problemei 2.2.47:
$$C = C_V + R/(1-k) = C_V + R/2 = 3R. \qquad (7)$$
Problema se poate rezolva elementar observând că procesul (1) se reprezintă în diagrama p - V printr-o *dreaptă* care trece prin origine, deci lucrul mecanic se calculează uşor ca *aria* trapezului de sub grafic. Mai departe se poate judeca cu variaţii mici, ΔT, etc.

(* *)2.2.46. ***O cantitate*** ν moli ***de gaz perfect cu căldura molară izocoră*** C_V ***suferă o transformare în care*** $V \sim \sqrt{T}$ ***. Gazul este încălzit lent de la*** T_1 ***la*** T_2***. Ce lucru mecanic efectuează gazul şi care este căldura sa molară în această transformare ? Reprezentaţi procesul în diagramele*** p - V, V - T, p - T .

Rezolvare. Fie ecuaţia procesului : $T = aV^2$, $a = \text{const}$. (1)

Atunci $pV = \nu RT = \nu R \cdot aV^2$, $\quad p = \nu R aV$. (2)
$$L = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \nu RaV\mathrm{d}V = (\nu R a/2)(V_2^2 - V_1^2) =$$
$$= (\nu R/2)(aV_2^2 - aV_1^2) = (\nu R/2)(T_2 - T_1) = (\nu R/2)\,\Delta T. \qquad (3)$$
$$Q = \Delta U + L = \nu C_V \Delta T + (\nu R/2)\,\Delta T = \nu(C_V + R/2)\,\Delta T, \qquad (4)$$
de unde prin definiţie : $\quad C = Q/(\nu\Delta T) = C_V + R/2$. (5)

Dealtfel, transformarea dată este o **politropă** :
$$TV^{-2} = a = \text{const}, \quad -2 = k - 1, \quad k = -1 \qquad (6)$$
şi conform problemei 2.2.47 :
$$C = C_V + R/(1-k) = C_V + R/2. \qquad (6)$$
Graficele sunt aceleaşi ca la problema 2.2.45.

Şi această problemă se poate rezolva elementar, fără derivate şi integrale, observând că procesul (6) se reprezintă în diagrama p - V printr-o ***dreaptă*** trecând prin origine, deci lucrul mecanic se calculează uşor ca ***aria*** trapezului de sub grafic.

*** * 2.2.47.** ***Un gaz perfect suferă transformarea*** **politropică** $pV^k = \text{const}$. ***Calculaţi :*** a) ***lucrul mecanic efectuat de gaz,*** **b)** ***căldura absorbită şi căldura molară politropică.*** **c)** ***Reciproc, arătaţi că singurele transformări cu căldura molară constantă sunt*** **politropele.**

Rezolvare. a) $L = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\text{const}}{V^k}\mathrm{d}V =$
$$= [\text{const}/(1-k)]\,(V_2^{1-k} - V_1^{1-k}), \qquad (k \neq 1),$$
dar $\quad p_1V_1^k = p_2V_2^k = \text{const}$, $\quad$ atunci

$$L = (p_2V_2 - p_1V_1)/(1-k) = \nu R(T_2 - T_1)/(1-k)\,, \quad (k \neq 1)\,. \qquad (1)$$

Pentru $k = 1$ se obține cazul *izotermei* :

$$L = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V}\mathrm{d}V = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = \nu RT \ln\frac{V_2}{V_1}\,. \qquad (2)$$

b) $Q = \Delta U + L = \nu C_v \Delta T + \nu R\Delta T)/(1-k) =$

$$= \nu[C_v + R/(1-k)]\,\Delta T = \nu C_k \Delta T\,, \qquad (3)$$

de unde căldura molară pe **politropă** : $C_k = C_v + R/(1-k)$ (4)

(pentru *izotermă* $C \to \infty$; pentru *izocoră* $k \to \infty$) .

c) $Q = \nu C\mathrm{d}T = \nu C_v \mathrm{d}T + p\mathrm{d}V$, $\nu(C - C_v)\mathrm{d}T = p\mathrm{d}V = (\nu RT/V)\mathrm{d}V$,

separăm variabilele şi integrăm: $(C - C_v)\mathrm{d}T/T = R\mathrm{d}V/V$,

$$\int (C - C_v)\frac{\mathrm{d}T}{T} = \int R\frac{\mathrm{d}V}{V}\,, \quad (C - C_v)\ln T = R\ln V + \ln K\,,$$

unde am scris constanta de integrare sub forma $\ln K$. Rezultă

$$\ln T^{C-C_V} = \ln V^2 + \ln K = \ln(KV^2) \quad \text{sau} \quad T^{C-C_V} = KV^2\,,$$

$$T \cdot V^{R/(C_V - C)} = K' = \text{const}\,, \qquad (5)$$

dar ecuația politropei $pV^k = \text{const}$ se poate scrie şi $TV^{k-1} = \text{const}$,

deci $R/(C_v - C) = k - 1$, de unde

$$C = C_v + R/(1-k)\,. \qquad (6)$$

Căldura molară politropică se mai poate scrie astfel :

$$C_k = C_v + R/(1-k) = C_v(\gamma - k)/(1-k)\,. \qquad (7)$$

Pentru $k \in (1\,,\,\gamma)$, avem $C_k < 0$.

*

2.3. Ciclul Carnot şi alte cicluri

2.3.1. ***O maşină termică funcţionează după ciclul* Carnot. *Gazul cedează sursei reci o fracţiune* f = 0,60 *din căldura absorbită de la sursa caldă, a cărei temperatură este* t_1 = 227°C. *Aflaţi randamentul şi temperatura sursei reci. Reprezentaţi ciclul Carnot în diagramele* p - V , V - T, p - T .**

Rezolvare. Din formula randamentului sau direct din calcul rezultă

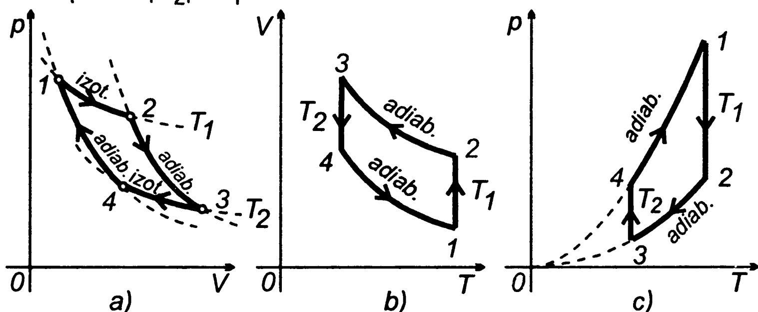
$$\eta = 1 - |Q_2| / Q_1 = 1 - T_2 / T_1 \rightarrow Q_1 / |Q_2| = T_1 / T_2 , \qquad (1)$$

raportul căldurilor absorbită / cedată într-un ciclu **Carnot** *reversibil este egal cu raportul temperaturilor* **termodinamice** *ale termostatelor respective* (aceasta stă, de fapt, la baza definirii scării *termodinamice* a temperaturilor, care coincide - în virtutea teoremelor lui **Carnot** - cu scara absolută Kelvin bazată pe gazul *ideal*).

În cazul nostru : $|Q_2| = f\, Q_1 \rightarrow$

$$f Q_1 / Q_1 = T_2 / T_1 \rightarrow T_2 = f\, T_1 = 300 \text{ K} = 27^{\circ}\text{C} , \qquad (1)$$

$$\eta = 1 - |Q_2| / Q_1 = 1 - f = 40 \ \% .$$



CICLUL CARNOT
Fig.2.3.1

Pentru grafice observăm că adiabata în *V - T* arată asemănător adiabatei în *p - V* , iar în *p - T* arată ca o parabolă cu minim în origine. Observăm, de asemenea, că sensul de parcurs ciclul este la fel în *p - V* şi *p - T*, dar inversat în *V - T*.

2.3.2. ***Într-un ciclu* Carnot *de randament*** η = 20 % ***lucrul mecanic efectuat de gaz ideal la destinderea izotermă este*** L_{izot} = 100 J. ***Care este lucrul mecanic consumat la comprima-rea izotermă ? Reprezentați ciclul Carnot în diagramele*** p - V, V - T, p - T .

Rezolvare. Pe *izoterma* gazului *ideal* ΔU = 0 (*legea lui Joule* : energia intemă a gazului *ideal* depinde numai de temperatură), atunci

$L_{izot} = Q_1$, $W_{izot} = |Q_2|$, $\eta = 1 - |Q_2| / Q_1 = 1 - W_{izot} / L_{izot}$, (1)

$W_{izot} = (1 - \eta)\, L_{izot}$ = 80 J. (2)

Graficele sunt date la problema precedentă 2.3.2.

2.3.3. ***Calculați randamentul ciclului* Carnot *în funcție de raportul de compresie*** $\varepsilon = V_4 / V_1$= 2,0 ***şi exponentul adiabatic*** γ = 1,40 ***(gaze diatomice). Cunoscând*** V_2 = 3,00 L , ***aflați*** V_3, ***Reprezentați ciclul în diagramele*** p - V, V - T , p - T.

Rezolvare. Graficele sunt date la problema 2.3.2.

Aplicăm ecuația adiabatei $TV^{\gamma-1}$ = const :

$T_2 / T_1 = (V_1 / V_4)^{\gamma-1} = T_2 / T_1 = (V_2 / V_3)^{\gamma-1} = 1 / \varepsilon^{\gamma-1}$, (1)

$\eta = 1 - T_2 / T_1 = 1 - 1 / \varepsilon^{\gamma-1}$= 24 % . (2)

$V_1 / V_4 = V_2 / V_3 \rightarrow V_3 = V_2 V_4 / V_1 = V_2\, \varepsilon$ = 6,00 L . (3)

2.3.4. ***Calculați randamentul ciclului* Carnot *cunoscând temperatura sursei calde*** t_1 = 127°C ***şi lucrul mecanic la destinderea* adiabatică *pentru un mol de gaz diatomic :*** L^*_{ad} = 2,49 kJ/mol. ***Reprezentați ciclul* Carnot *în diagramele*** p - V, V-T, p -T.

Rezolvare. Graficele sunt date la problema 2.3.2.

$L^*_{ad} = - C_v(T_2 - T_1) \rightarrow T_1 - T_2 = L^*_{ad} / C_v$, (1)

$\eta = (T_1 - T_2) / T_1 = L^*_{ad} / (C_v T_1) = 2\, L^*_{ad} / (5RT_1)$ = 30 % . (2)

2.3.5. ***O pompă de căldură, funcționând după un ciclu* Carnot *(inversat) între temperaturile*** t_2 = - 13°C (***afară***) ***şi*** t_1 = = 27°C (***în cameră***) ***consumă pe ciclu energie electrică*** W = = 2,00 kJ. ***Calculați pe ciclu :* a) *Căldura absorbită de afară,* b) *Căldura cedată în cameră,* c) *eficiența pompei de căldură ,* d) *eficiența maşinii considerată ca maşină* frigorifică.**

Rezolvare. a) Conform teoremei de la problema 2.3.2 :

$Q_{abs} / Q_{ced} = T_2 / T_1$, $Q_{ced} = Q_{abs} + W$, (1)

unde W este lucrul mecanic primit de maşină.

$Q_{abs} = W \cdot T_2 / (T_1 - T_2)$ = 13 kJ . (2)

b) $Q_{ced} = Q_{abs} + W = 15$ kJ . (3)

c) $\varepsilon = Q_{ced} / W = 7,5$; d) $\varphi = Q_{abs} / W = 6,5$, (4)

adică per fiecare joule consumat de la rețeaua electrică, maşina absoarbe de afară (sau evacuează din interiorul frigiderului) 6,5 J şi degajă în cameră 6,5 J + 1 J = 7,5 J .

2.3.6. ***Ce câştig de căldură se obține pentru încălzirea unei hale, dacă în loc să ardem direct cărbunele în sobe, el este folosit într-o maşină termică* Carnot *funcționând între temperaturile*** t_2 =27°C ***şi*** t_1=227°C , ***iar lucrul mecanic astfel obținut este folosit într-o pompă de căldură* Carnot, *care ia căldură de afară la temperatura*** t_4 = - 13°C ***şi o cedează în hală la temperatura*** t_3 = 27°C ***?***

Rezolvare. $L = \eta_1 Q_1 = Q_1 (T_1 - T_2) / T_1$,

$W = \eta_2 Q_3' = Q_3' (T_3 - T_4) / T_3$, (1)

dar $L = W$, $Q_3' = L\, T_3 / (T_3 - T_4) = Q_1 [(T_1 - T_2) / T_1]\, T_3 / (T_3 - T_4)$.(2)

$Q_3' / Q_1 = \eta_1 / \eta_2 = [T_1 - T_2) / T_1] \cdot T_3 / (T_3 - T_4) = 3,0$, (3)

deci prin acest sistem, cu aceeaşi cantitate de cărbuni, obținem o căldură de 3 ori mai mare decât puterea lor calorifică, pe seama căldurii luate de fără (de la sursa rece) .

2.3.7. ***O maşină frigorifică* Carnot *ia căldură de la apă la*** t_2= =0°C ***şi o cedează unui fierbător cu apă la*** t_1 = 100°C. ***Ce masă*** m_g ***de apă trebuie înghețată la sursa rece pentru a vaporiza*** m_v = 1,00 kg ***apă în fierbător ? De câte ori lucrul mecanic consumat de această maşină este mai mic decât energia necesară direct pentru vaporizarea apei*** m_v ***?***

Rezolvare. Conform teoremei de la problema 2.3.2 :

$Q_1 / |Q_2| = m_v\lambda_v / (m_g\lambda_g) = T_1 / T_2$,

$m_g = m_v \cdot \lambda_v T_2 / (\lambda_g T_1) = 4,94$ kg . (1)

Lucrul mecanic consumat de maşina frigorifică *Carnot* : $W = m_g\lambda_g$. Energia necesară direct pentru vaporizarea apei m_v este $m_v\lambda_v$, deci raportul cerut este

$m_v\lambda_v / W = m_v\lambda_v / (m_v\lambda_v - m_g\lambda_g) = 1 : [1 - m_g\lambda_g / (m_v\lambda_v)] =$
$= 1 : (1 - T_2 / T_1) = T_1 / (T_1 - T_2) = 3,73$. (2)

Pentru vaporizarea directă a m_v = 1,0 kg apă trebuie o energie $m_v\lambda_v$ = 2,26 MJ, iar prin intermediul maşinii *Carnot* trebuie $W =$ $= m_v\lambda_v - m_g\lambda_g$ =0,60 MJ , de 3,73 ori mai puțin .

2.3.8. ***Se dă ciclul din figură, în care raportul de compresie*** $\varepsilon = V_2 / V_1 = 2{,}72$ ***şi*** $\gamma = 1{,}40$ ***(gaz diatomic). Aflaţi randamentul ciclului. Transcrieţi ciclul în coordonatele*** V - T , p - T .

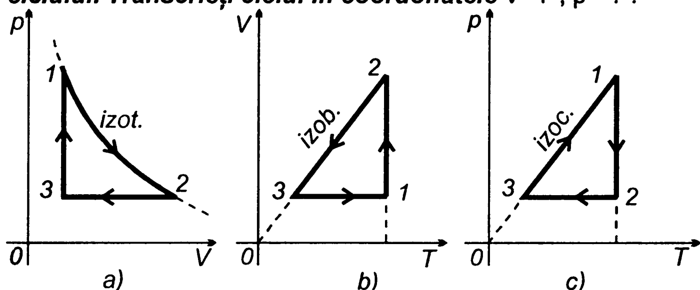


Fig.2.3.8

Rezolvare. Căldura se absoarbe pe porţiunile *3 - 1, 1 - 2* şi este cedată pe porţiunea *2 - 3* : $\eta = 1 - |Q_2| / Q_1 =$

$$= 1 - \nu C_p(T_1 - T_3) : [\nu C_v(T_1 - T_3) + \nu R T_1 \ln(V_2 / V_1)] =$$

$$= 1 - (C_p / C_v)(1 - T_3 / T_1) : [1 - T_3 / T_1 + (R / C_v) \ln(V_2 / V_1)] . \quad (1)$$

Dar $\quad T_3 / T_1 = V_1 / V_2 = 1 / \varepsilon \; ; R / C_v = \gamma - 1 , \quad (2)$

$$\eta = 1 - \gamma(1 - 1 / \varepsilon) : [1 - 1 / \varepsilon + (\gamma - 1) \ln(V_2 / V_1)] = 14{,}2 \, \% . \quad (3)$$

2.3.9. ***Calculaţi randamentul ciclului din figură, cunoscând raportul de compresie*** $\varepsilon = V_3 / V_1 = 4{,}0$ ***şi*** $\gamma = 1{,}40$. ***Comparaţi cu randamentul ciclului*** **Carnot** ***funcţionând între temperaturile extreme. Trasaţi graficul şi în diagramele*** V - T, p - T .

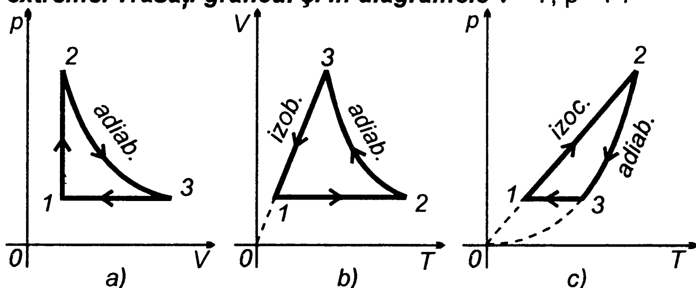


Fig.2.3.9

Rezolvare. Amintim că graficul adiabatei în *V - T* este asemănător celui din *p - V*, iar în *p - T* seamănă cu o parabolă cu *minim* în origine. Sensul de parcurgere a ciclului în *V - T* se inversează faţă de cel din *p - V* şi *p - T*.

Căldura se absoarbe pe *izocora 1 - 2* şi se cedează pe *izobara 3 -1*.

$$\eta = 1 - |Q_2| / Q_1 =$$

$$= 1 - \nu C_p(T_3 - T_1) : [\nu C_v(T_2 - T_1)] = 1 - \gamma(T_3 / T_1 - 1) : (T_2 / T_1 - 1) . \quad (1)$$

Pe de altă parte , $T_3 / T_1 = V_3 / V_1 = \varepsilon$,

$$T_2 / T_1 = p_2 / p_1 = p_2 / p_3 = (V_3 / V_2)^\gamma = \varepsilon^\gamma , \quad (2)$$

$$\eta = 1 - \gamma(\varepsilon - 1) : (\varepsilon^\gamma - 1) = 30 \% , \quad (3)$$

$$\eta_C = 1 - T_1 / T_2 = 1 - 1 / \varepsilon^\gamma = 85 \% . \quad (4)$$

2.3.10. ***Calculaţi randamentul ciclului din figură, cunoscând raportul de compresie*** $\varepsilon = V_3 / V_1 = 3{,}0$, $\gamma = 1{,}40$. ***Comparaţi cu randamentul ciclului* Carnot *funcţionând între temperaturile extreme*** $T_{1,2}$. ***Transcrieţi ciclul şi în diagramele*** p - V , p - T .

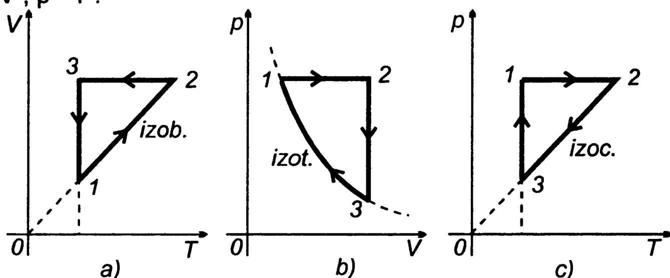


Fig.2.3.10

Rezolvare. Căldura este primită pe destinderea izobară *1 -2* :

$$Q_1 = \nu C_p(T_2 - T_1) , \quad (1)$$

$$|Q_2| = \nu C_v(T_2 - T_3) + \nu R T_1 \ln(V_3 / V_1) . \quad (2)$$

Dar $\varepsilon = V_3 / V_1 = V_2 / V_1 = T_2 / T_1$, $(T_3 = T_1)$, (3)

$$\eta = 1 - |Q_2| / Q_1 =$$

$$= 1 - [\nu C_v T_1(T_2 / T_1 - 1) + \nu R T_1 \ln(V_3 / V_1) : [\nu C_p T_1(T_2 / T_1 - 1)] =$$

$$= 1 - [\varepsilon - 1 + (\gamma - 1) \ln \varepsilon] : [\gamma(\varepsilon - 1)] = 13 \% , \quad (4)$$

unde $R / C_v = \gamma - 1$, $R = C_p - C_v$, $\gamma = C_p / C_v$; (5)

$$\eta_C = 1 - T_1/T_2 = 1 - 1/\varepsilon = 67 \% . \quad (6)$$

2.3.11. ***Un gaz ideal diatomic, având presiunea iniţială*** p_1 = = 200 kPa , ***este încălzit izocor, apoi destins adiabatic până la temperatura iniţială, astfel încât*** p_3 = 100 kPa ***şi*** V_3 = 2,00 L , ***de unde revine izoterm în starea iniţială. Reprezentaţi ciclul în diagramele*** p - V, V - T, p - T. ***Calculaţi:* a) *volumul şi presiunea***

în starea 2 , b) ***lucrul mecanic efectuat în destinderea adiabatică,*** c) ***variația energiei interne în destinderea adiabatică,*** d) ***randamentul ciclului în funcție de raportul de compresie*** $\varepsilon = V_3 / V_1$ ***și*** $\gamma = C_p / C_v$, e) ***randamentul ciclului Carnot funcționând între temperaturile extreme.***

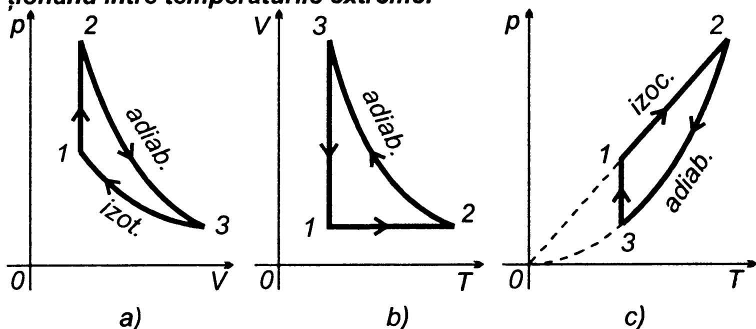


Fig.2.3.11

Rezolvare. a) $V_2 = V_1 = V_3 \cdot p_3 / p_1 = 1{,}00$ L , (1)

$p_2 / p_1 = T_2 / T_1 = T_2 / T_3 = (V_3 / V_2)^{\gamma-1} = (V_3 / V_1)^{\gamma-1} = \varepsilon^{\gamma-1} =$

$= (p_1 / p_3)^{\gamma-1}$, $p_2 = p_1 (p_1 / p_3)^{\gamma-1} = 260$ kPa . (2)

b) $L_{ad} = -\Delta U = -\nu C_v(T_3 - T_2) = (C_v / R)(\nu R T_2 - \nu R T_3) =$

$= [C_v / (C_p - C_v)](p_2V_2 - p_3V_3) = (p_2V_2 - p_3V_3)/(\gamma - 1) = 800$ J . (3)

c) $\Delta U = -L$. d) $\eta = 1 - |Q_2| / Q_1 =$

$= 1 - [\nu R T_1 \ln(V_3 / V_1)] : [\nu C_v(T_2 - T_1)] = 1 - [(C_p - C_v)\ln\varepsilon] : [C_v(T_2 / T_1 - 1)] =$

$= 1 - [(\gamma - 1)\ln\varepsilon] : (\varepsilon^{\gamma-1} - 1) = 18$ % . (4)

e) $\eta_C = 1 - T_1 / T_2 = 1 - 1/\varepsilon^{\gamma-1} = 24$ % . (5)

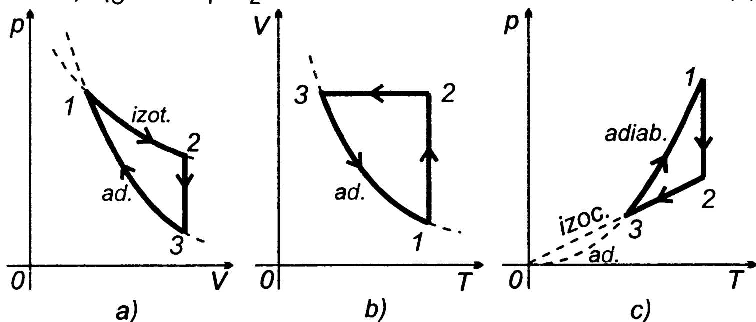


Fig.2.3.12

2.3.12. ***Reprezentați ciclul din figură în diagramele*** V - T, p - T. ***Calculați randamentul ciclului în funcție de raportul de compresie*** $\varepsilon = V_3 / V_1 = 4{,}0$, $\gamma = 1{,}40$. ***Comparați cu randamentul ciclului Carnot funcționând între temperaturile extreme.***

Rezolvare. $Q_1 = \nu RT_1 \ln(V_2 / V_1) = \nu RT_1 \ln \varepsilon$, (1)

$|Q_2| = \nu C_v(T_2 - T_3) = \nu C_v T_1(1 - T_3 / T_1)$, (2)

dar $T_3 / T_1 = (V_1 / V_3)^{\gamma-1} = 1 / \varepsilon^{\gamma-1}$, (3)

$\eta = 1 - |Q_2| / Q_1 = 1 - [\nu C_v T_1(1 - 1/\varepsilon^{\gamma-1}) : (\nu RT_1 \ln \varepsilon) =$

$= 1 - (1 - 1/\varepsilon^{\gamma-1}) : [(\gamma - 1) \ln \varepsilon] = 23\ \%$, (4)

unde $R = C_p - C_v$, $\gamma = C_p / C_v$; (5)

$\eta_C = 1 - T_3 / T_1 = 1 - 1/\varepsilon^{\gamma-1} = 42{,}5\ \%$. (6)

2.3.13. ***Transcrieți ciclul din figură și în diagramele*** V -T , p - T. ***Calculați randamentul ciclului în funcție de:*** **a)** ***raportul de compresie*** $\varepsilon = V_3 / V_1 = 4{,}0$, $\gamma = 1{,}40$, **b)** ***raportul temperaturilor*** $\tau = T_2 / T_1 = e$ ($\approx 2{,}71$). **c)** ***Comparați cu randamentul ciclului Carnot funcționând între temperaturile*** $T_{1,2}$ **din** ***cazul precedent.***

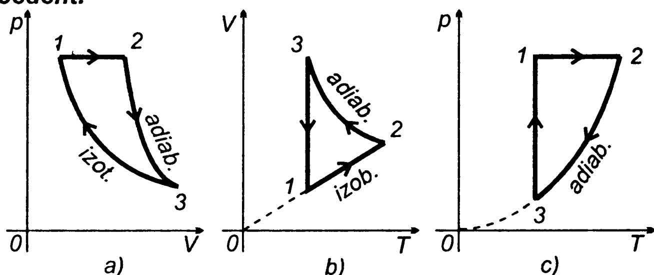


Fig.2.3.13

Rezolvare. a) $Q_1 = \nu C_p(T_2 - T_1)$, $|Q_2| = \nu RT_1 \ln(V_3 / V_1)$, (1)

$T_2 / T_1 = T_2 / T_3 = (p_3 / p_2)^{(1-\gamma)/\gamma} = (V_1 / V_3)^{(1-\gamma)/\gamma} = \varepsilon^{(\gamma-1)/\gamma}$, (2)

unde am folosit ecuația adiabatei :

$pV^{\gamma} = \text{const} \rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{const} \rightarrow p^{1-\gamma} T^{\gamma} = \text{const}$

sau $T p^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const}$; (3)

$\eta = 1 - |Q_2| / Q_1 = 1 - [\nu RT_1 \ln \varepsilon] : [\nu C_p T_1(T_2 / T_1 - 1)] =$

$= 1 - [R \ln \varepsilon] : \{C_p[\varepsilon^{(\gamma-1)/\gamma} - 1]\}$, (4)

dar $R = C_p - C_v$, $\gamma = C_p / C_v \rightarrow R / C_p = 1 - 1/\gamma = (\gamma - 1) / \gamma$, (5)

$\eta = 1 - [(\gamma - 1) \ln \varepsilon] : \{\gamma[\varepsilon^{(\gamma-1)/\gamma} - 1]\} = 18{,}5\ \%$, (6)

$\eta_C = 1 - T_1 / T_2 = 1 - 1 : \varepsilon^{(\gamma-1)/\gamma} = 33\ \%$. (7)

b) $\varepsilon = V_3 / V_1 = (V_3 / V_2) \cdot V_2 / V_1 = (T_2 / T_1)^{1/(\gamma-1)} \cdot T_2 / T_1 =$

$= (T_2 / T_1)^{\gamma/(\gamma-1)} = \tau^{\gamma/(\gamma-1)}$, (8)

$\eta = 1 - [(\gamma - 1) \ln \tau^{\gamma/(\gamma-1)}] : [\gamma(\tau - 1)] = 1 - (\ln \tau) / (\tau - 1) = 42\ \%$;(9)

$\eta_C = 1 - T_1 / T_2 = 1 - 1/\tau = 67\ \%$. (10)

2.3.14. ***Un gaz ideal diatomic parcurge ciclul din figură, în care:*** $t_1 = 27^oC$, $t_2 = 227^oC$, $p_4 = 100$ kPa , $p_1 = 271{,}8$ kPa. ***Transcrieți ciclul în diagramele*** V - T , p - T . ***Calculați pe ciclu și pentru*** $\nu = 1{,}00$ mol ***de gaz : a) Căldura absorbită*** Q_1 , **b)** ***Căldura cedată*** $|Q_2|$, c) ***Lucrul mecanic*** L , **d)** ***randamentul ciclu-lui*** η , **e)** ***randamentul ciclului*** **Carnot** ***funcționând între ace-leași temperaturi.*** **f)** ***Exprimați randamentul ciclului în funcție de rapoartele de compresie :*** $\varepsilon = V_4/V_1 = p_1 / p_4$, $\rho = V_2 / V_1 = = T_2/T_1 = \tau$. ***Comparați cu randamentul ciclului*** **Carnot.**

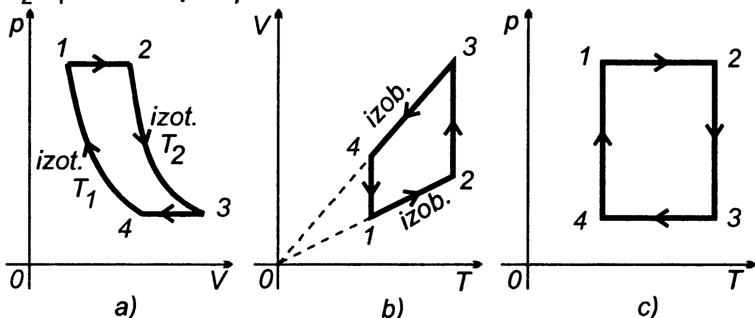


Fig.2.3.14

Rezolvare. a) $Q_1 = \nu(7R / 2)(T_2 - T_1) + \nu RT_2 \ln(p_1/ p_4) =$

$= 10{,}0$ kJ . (1)

b) $|Q_2| = \nu(7R / 2)(T_2 - T_1) + \nu RT_1 \ln(p_1 / p_4) = 8{,}3$ kJ . (2)

c) $L = Q_1 - |Q_2| = \nu R(T_2 - T_1)\ln(p_1 / p_4) = 1{,}70$ J . (3)

d) $\eta = L / Q_1 = 17\ \%$. (4)

e) $\eta_C = 1 - T_1 / T_2 = 40\ \%$. (5)

f) $\varepsilon = V_4 / V_1 = V_3 / V_2 = p_1 / p_4$, (6)

$\eta = [\nu R(T_2 - T_1)\ln(p_1/ p_4)] : [\nu C_p(T_2 - T_1) + \nu RT_2 \ln(p_1/ p_4)] =$

$= (T_2 - T_1) :\{ [\gamma / (\gamma - 1)](T_2 - T_1)/ \ln \varepsilon + T_2 \} < \eta_C = (T_2 - T_1) / T_2$,(7)

$\eta = [T_1(T_2/T_1 - 1)\ln(p_1/p_4)] : [(C_p/R)T_1(T_2/T_1 - 1) + (T_2/T_1)\ln(p_1/p_4)] =$
$= [(\tau - 1)\ln\varepsilon] : \{[\gamma/(\gamma - 1)](\tau - 1) + \tau\ln\varepsilon\}$, $\eta_C = 1 - 1/\tau$. (8)

2.3.15. ***Transcrieți ciclul din figură în diagramele*** V-T, p -T. ***Exprimați randamentul ciclului în funcție de raportul de compresie*** $\varepsilon = V_4/V_1 = 5{,}0$ ***și raportul temperaturilor*** $\tau = T_2/T_1 = 2{,}0$, $\gamma = 1{,}40$. ***Comparați cu randamentul ciclului*** **Carnot .**

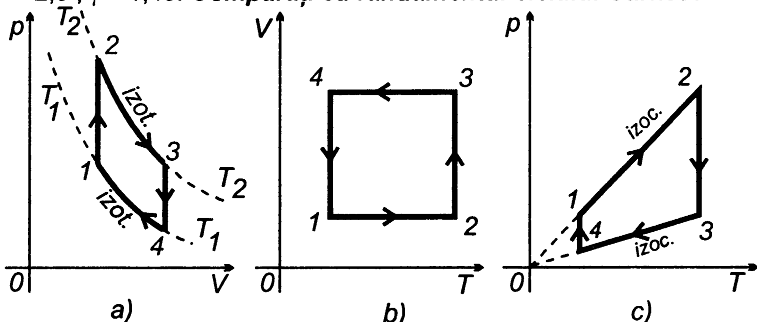


Fig.2.3.15

Rezolvare. $Q_1 = \nu C_v(T_2 - T_1) + \nu RT_2 \ln(V_4/V_1)$, (1)

$|Q_2| = \nu C_v(T_2 - T_1) + \nu RT_1 \ln(V_4/V_1)$, (2)

$\eta = (Q_1 - |Q_2|)/Q_1 = [R(T_2 - T_1)\ln\varepsilon] : [C_v(T_2 - T_1) + RT_2\ln\varepsilon] =$
$= (T_2 - T_1) : \{(T_2 - T_1)/[(\gamma - 1)\ln\varepsilon] + T_2\} < \eta_C = (T_2 - T_1) : T_2$, (3)

$\eta = [(T_2/T_1 - 1)\ln\varepsilon] : [(T_2/T_1 - 1)/(\gamma - 1) + (T_2/T_1)\ln\varepsilon] =$
$= [(\tau - 1)\ln\varepsilon] : [(\tau - 1)/(\gamma - 1) + \tau\ln\varepsilon] = 28\ \%$; (4)

$\eta_C = 1 - 1/\tau = 50\ \%$. (5)

2.3.16. ***Transcrieți ciclul din figură în diagramele*** V-T, p -T. ***Cunoscând numărul de moli*** $\nu = 1{,}00$ mol, ***temperaturile*** $t_1 = 27^oC$, $t_2 = 127^oC$, $t_3 = 427^oC$, ***calculați:* a) *lucrul mecanic efectuat de gaz pe ciclu,* b) *randamentul în funcție de rapoartele de compresie*** $\varepsilon = V_4/V_1 = 2{,}0$, $\delta = p_2/p_1 = 3{,}0$, $\gamma = 1{,}40$. ***Comparați cu randamentul ciclului*** **Carnot** ***funcționând între temperaturile extreme.***

Rezolvare. **a)** $T_2/T_1 = p_2/p_1 = p_3/p_4 = T_3/T_4 \rightarrow$

$T_4 = T_1 \cdot T_3/T_2$, (1)

Lucrul mecanic este egal cu *aria* ciclului în diagrama p - V:

$L = (p_2 - p_1)(V_4 - V_1) = p_2V_4 - p_2V_1 - p_1V_4 + p_1V_1 =$
$= \nu R(T_3 - T_2 - T_4 + T_1) = \nu R(T_3 - T_2 - T_1\ T_3/T_2 + T_1) =$

$= \nu R\,(T_2 - T_1)\,(T_3 - T_2) / T_2 = 627$ J (2)

sau altfel, $L = (\nu R\,T_2 / V_2 - \nu R\,T_1 / V_1)(\nu R\,T_4 / p_4 - \nu R\,T_1 / p_1) =$

$= \nu R\,(T_2 - T_1)\,\nu R\,(T_4 - T_1) : (p_1 V_1) =$

$= \nu R\,(T_2 - T_1)\,(T_1\,T_3 / T_2 - T_1) : T_1\,.$ (3)

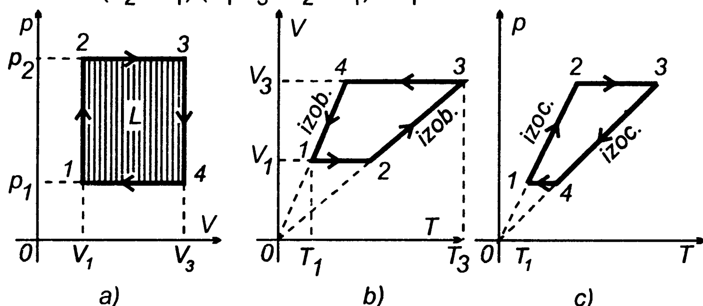


Fig.2.3.16

b) $Q_1 = \nu C_v(T_2 - T_1) + \nu C_p(T_3 - T_2),$ (4)

$|Q_2| = \nu C_v(T_3 - T_4) + \nu C_p(T_4 - T_1),$ (5)

$\eta = 1 - |Q_2| / Q_1 = 1 - [C_v T_1(T_3 / T_1 - T_4 / T_1) + C_p\,T_1(T_4 / T_1 - 1)] :$

$: [C_v T_1(T_2 / T_1 - 1) + C_p\,T_1(T_3 / T_1 - T_2 / T_1)]\,,$ (6)

dar $T_4 / T_1 = V_4 / V_1 = \varepsilon\,, \quad T_3 / T_4 = T_2 / T_1 = p_2 / p_1 = \delta\,,$ (7)

$\eta = 1 - [\varepsilon\delta - \varepsilon + \gamma(\varepsilon - 1)] : [\delta - 1 + \gamma(\varepsilon\delta - \delta)] =$

$= 1 - [\varepsilon(\delta - 1) + \gamma(\varepsilon - 1)] : [\delta - 1 + \gamma\delta\,(\varepsilon - 1)] =$

$= [(\gamma - 1)\,(\varepsilon - 1)\,(\delta - 1)] : [\delta - 1 + \gamma\delta\,(\varepsilon - 1)] = 13\ \%\,;$ (8)

$\eta_C = 1 - T_1 / T_3 = 1 - 1 / (\varepsilon\delta) = 83\ \%\,.$ (9)

2.3.17. ***Transcrieți ciclul*** **Otto** ***al motorului cu explozie în diagramele*** V - T , p - T. ***Calculați randamentul în funcție de raportul de compresie*** $\varepsilon = V_4 / V_1 = 6{,}0$, $\gamma = 1{,}40$. ***Comparați cu randamentul ciclului*** **Carnot** ***funcționând între temperaturile extreme.***

Rezolvare. $Q_1 = \nu C_v(T_2 - T_1)\,, \qquad |Q_2| = \nu C_v(T_3 - T_4)\,.$ (1)

Din ecuația adiabatei $TV^{\gamma - 1} = \text{const}$ avem :

$T_2 / T_3 = (V_3 / V_2)^{\gamma - 1} = (V_4 / V_1)^{\gamma - 1} = T_1 / T_4 = \varepsilon^{\gamma - 1},$ (2)

$\eta = 1 - |Q_2| / Q_1 = 1 - (T_3 - T_4) / (T_2 - T_1) =$

$= 1 - [T_3(1 - T_4 / T_3)] : [T_2(1 - T_1 / T_2)] = 1 - T_3 / T_2 <$

$< \eta_C = 1 - T_4 / T_2\,, \quad (T_4 < T_3)\,;$ (3)

$\eta = 1 - T_3 / T_2 = 1 - 1 / \varepsilon^{\gamma - 1} = 51\ \%\,.$ (4)

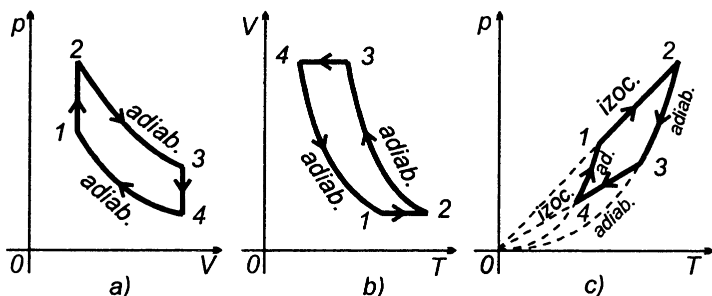


Fig.2.3.17

2.3.18. ***Reprezentați ciclul motorului cu reacție, dat în figură, și în diagramele*** V -T , p - T. ***Exprimați randamentul în funcție de raportul de compresie*** $\varepsilon = V_4/V_1 = 4{,}0$, $\gamma = 1{,}40$. ***Comparați cu randamentul ciclului*** **Carnot** ***funcționând între temperaturile extreme*** $T_{4,2}$.

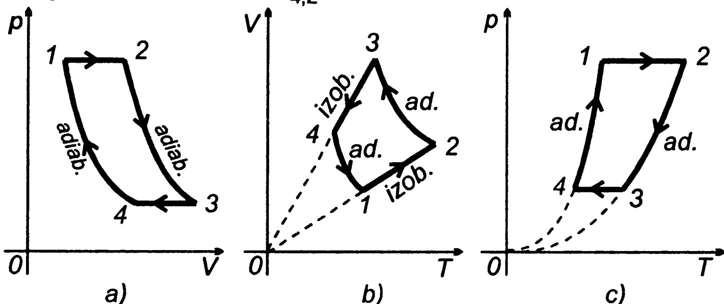


Fig.2.3.18

Rezolvare. $Q_1 = \nu C_p(T_2 - T_1)$, $\quad |Q_2| = \nu C_p(T_3 - T_4)$. (1)

Din ecuațiile adiabatei $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ și $T p^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const}$ avem:

$T_1/T_4 = (V_4/V_1)^{\gamma-1} = \varepsilon^{\gamma-1} = (p_4/p_1)^{(1-\gamma)/\gamma} = (p_3/p_2)^{(1-\gamma)/\gamma} = T_2/T_3$, (2)

$$\eta = 1 - |Q_2|/Q_1 = 1 - (T_3 - T_4)/(T_2 - T_1) =$$
$$= 1 - [T_3(1 - T_4/T_3)] : [T_2(1 - T_1/T_2)] = 1 - T_3/T_2 <$$
$$< \eta_C = 1 - T_4/T_2 , \quad (T_4 < T_3) ; \qquad (3)$$

$$\eta = 1 - T_3/T_2 = 1 - 1/\varepsilon^{\gamma-1} = 42{,}6\ \% . \qquad (4)$$

2.3.19. ***Transcrieți ciclul*** **Diesel** ***și în diagramele*** V -T, p -T. ***Calculați randamentul în funcție de rapoartele de compresie:*** $\varepsilon = V_4/V_1 = 10{,}0$, $\rho = V_2/V_1 = 2{,}0$, $\gamma = 1{,}40$. ***Comparați cu randamentul ciclului*** **Carnot** ***funcționând între temperaturile*** $T_{4,1}$ ***și*** $T_{4,2}$.

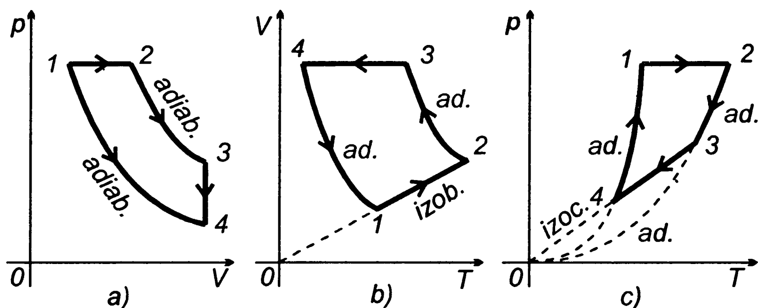


Fig.2.3.19

Rezolvare. $Q_1 = \nu C_p(T_2 - T_1)$, $|Q_2| = \nu C_v(T_3 - T_4)$, (1)

dar din ecuația adiabatei $TV^{\gamma - 1}$ = const rezultă :

$T_1 / T_4 = (V_4 / V_1)^{\gamma - 1} = \varepsilon^{\gamma - 1}$; $T_2 / T_3 = (V_3 / V_2)^{\gamma - 1} =$

$= [(V_4 / V_1) \cdot (V_1 / V_2)]^{\gamma - 1} = (\varepsilon / \rho)^{\gamma - 1} \rightarrow (T_1 / T_4) \cdot (T_3 / T_2) = \rho^{\gamma - 1}$,(2)

$T_2 / T_1 = V_2 / V_1 = \rho$, $T_3 / T_4 = \rho^\gamma$, $T_2 / T_4 = (T_2 / T_1) \cdot T_1 / T_4 = \rho\varepsilon^{\gamma - 1}$; (3)

$\eta = 1 - |Q_2| / Q_1 = 1 - C_v(T_3 - T_4) : [C_p(T_2 - T_1)] =$

$= 1 - T_4(T_3 / T_4 - 1) : [\gamma T_1(T_2 / T_1 - 1)] =$

$= 1 - (\rho^\gamma - 1) : [\gamma \varepsilon^{\gamma - 1}(\rho - 1)] = 53\ \%$. (4)

$\eta_{C1} = 1 - T_4 / T_1 = 1 - 1/\varepsilon^{\gamma - 1} = 60\ \%$, (5)

$\eta_{C2} = 1 - T_4 / T_2 = 1 - 1/(\rho\varepsilon^{\gamma - 1}) = 80\ \%$. (6)

2.3.20. ***Două maşini termice lucrează cu gaz ideal după ciclurile 12341 , respectiv 12561, din figură. Reprezentați ciclurile şi în diagramele*** V - T , p - T. ***Aflați raportul randamentelor celor două maşini în funcție de exponentul adiabatic*** γ **.**

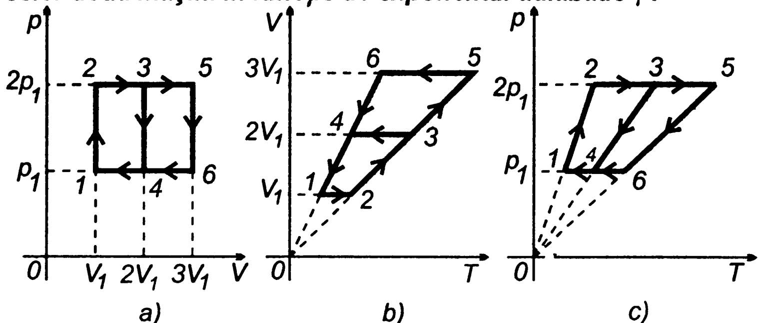


Fig.2.3.20

Rezolvare. Lucrul mecanic efectuat într-un ciclu este egal cu ***aria*** ciclului în diagrama *p - V*, deci

$$L_1 = (2p_1 - p_1)(2V_1 - V_1) = p_1V_1,$$

$$L_2 = (2p_1 - p_1)(3V_1 - V_1) = 2p_1V_1, \qquad (1)$$

$$\eta_1 = p_1V_1 : [\nu C_v(T_2 - T_1) + \nu C_p(T_3 - T_2)] =$$

$$= RT_1 : [C_v T_1(T_2 / T_1 - 1) + C_p T_2(T_3 / T_2 - 1)] =$$

$$= R : [C_v (p_2 / p_1 - 1) + C_p(p_2 / p_1)(V_3 / V_2 - 1)] =$$

$$= R : (C_v + C_p \cdot 2) = (C_p - C_v) : (C_v + 2C_p) =$$

$$= (\gamma - 1) : (1 + 2\gamma), \qquad (3)$$

$$\eta_2 = 2p_1V_1 : [\nu C_v(T_2 - T_1) + \nu C_p(T_5 - T_2)] =$$

$$= 2R : (C_v + C_p \cdot 2 \cdot 2) = 2(\gamma - 1) : (1 + 4\gamma), \qquad (4)$$

$$\eta_1 / \eta_2 = (1 + 4\gamma) : [2(1 + 2\gamma)] < 1. \qquad (5)$$

2.3.21. ***Aflați raportul randamentelor ciclurilor din figură : 1234 şi 5674, parcurse de un gaz ideal* monoatomic. *Reprezentați ciclurile şi în diagramele* V - T, p - T.**

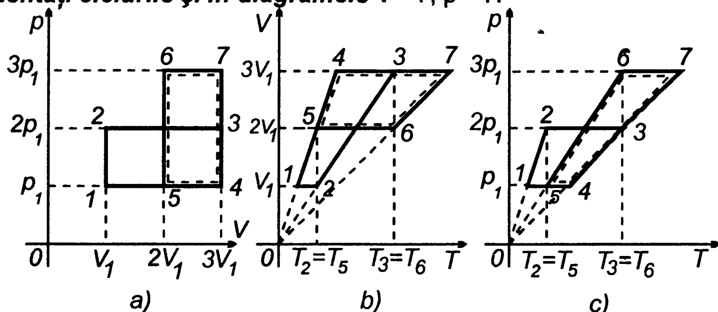


Fig.2.3.21

Rezolvare. Lucrul mecanic efectuat în cele două cicluri:

$$L = (p_2 - p_1)(V_4 - V_1) = 2p_1V_1 = 2\nu RT_1 = L'. \qquad (1)$$

$$p_2V_2 = 2p_1V_1 = p_5V_5 \rightarrow T_2 = T_5 = 2T_1, \qquad (2)$$

$$T_4 = 3T_1, \quad T_3 = T_6 = 2T_4 = 6T_1, \quad T_7 = 9T_1. \qquad (3)$$

$$Q_1 = \nu C_v(T_2 - T_1) + \nu C_p(T_3 - T_2) = \nu RT_1 \cdot 23/2,$$

$$\eta = L / Q_1 = 4/23; \qquad (4)$$

$$Q_1' = \nu C_v(T_6 - T_5) + \nu C_p(T_7 - T_6) = \nu RT_1 \cdot 27/2,$$

$$\eta' = 4/27, \qquad (5)$$

unde pentru gaze *monoatomice* $C_v = 3R/2$, $C_p = 5R/2$.

$$\eta / \eta' = Q_1' / Q_1 = 27/23 > 1. \qquad (6)$$

2.3.22. ***O masă*** $m = 0{,}200$ kg ***argon se află într-un cilindru vertical sub un piston blocat, în starea inițială*** $p_1 = 410$ kPa, $V_1 = 32$ L. **a)** ***Aflați căldura specifică*** C_v, ***cunoscând*** **R** ***şi*** μ. **b)** ***Calculați variația energiei cinetice a tuturor moleculelor gazului, când temperatura creşte cu*** $\Delta T = 273$ K. **c)** ***Deblocând pistonul, acesta coboară încet astfel că presiunea gazului variază*** **liniar** ***cu volumul, după legea*** $p = a - bV$ ***până la starea finală*** $p_2 = 1550$ kPa ***şi*** $V_2 = 9{,}0$ L. ***Aflați temperatura*** **maximă** ***atinsă de gaz în acest proces.***

Rezolvare. a) La gazele *monoatomice* cum este argonul căldura *molară izocoră* este

$$C_v = 3R/2 = \mu c_v, \quad c_v = 3R/(2\mu) = 312 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}. \quad (1)$$

b) *Energia internă* a unui gaz ideal (perfect) este formată numai din energia *cinetică* a moleculelor sale (energia *potențială* de interacție a moleculelor fiind *neglijabilă*, ceea ce este valabil la temperaturi înalte şi presiuni joase) :

$$\Delta U = \nu C_v \Delta T = (m/\mu)(3R/2)\,\Delta T = 17 \text{ kJ}. \quad (2)$$

c) Preluăm rezultatele de la problema 1.4.10 :

$$a = (V_2 p_1 - V_1 p_2) : (V_2 - V_1), \quad b = -(p_2 - p_1) : (V_2 - V_1). \quad (3)$$

Parametrii de stare în punctul căutat : $V_m = a/(2b)$, $p_m = a/2$, (4)

$$T_m = (\mu p_m V_m) : (mR) = (\mu a^2) : (4mRb) =$$
$$= [\mu/(4mR)]\,(V_2 p_1 - V_1 p_2)^2 : [(V_2 - V_1)(p_1 - p_2)] = 490 \text{ K}. \quad (5)$$

2.3.23. ***Un tub subțire de lungime*** $\ell = 85{,}8$ mm ***aşezat orizontal şi închis la ambele capete, conține la mijloc o coloană de mercur de lungime*** $h = 9{,}8$ mm, ***de o parte şi de alta fiind aer la presiunea*** **normală**. ***Dacă scoatem coloana de mercur din poziția sa de echilibru, care va fi frecvența micilor oscilații ale acestei coloane? Se consideră temperatura constantă. Pentru ce lungime a coloanei de mercur frecvența va fi minimă ?***

Rezolvare. Dacă picătura de mercur se deplasează cu x, atunci de o parte presiunea scade, iar de cealaltă parte creşte :

$$p_0(\ell - h)/2 = p'\,[(\ell - h)/2 - x] = p''\,[(\ell - h)/2 + x] \quad (1)$$

şi se naşte o forță de revenire :

$$F = -(p' - p'')S = -p_0\,\{(\ell - h)4S] : [(\ell - h)^2 - 4x^2]\} \cdot x, \quad (2)$$

care pentru oscilații *mici* se aproximează:

$$F \approx -p_0\,[4S/(\ell - h)] \cdot x = -k\,x, \quad k = 4Sp_0/(\ell - h), \quad (3)$$

deci forța este de tip ***elastic*** cu constanta *cvasielastică k*. Atunci :

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4Sp_0}{(\ell - h)\rho S h}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{p_0}{(\ell - h)\rho h}} = 31{,}8 \text{ Hz}. \quad (4)$$

Sub radical la numitor avem un produs de doi factori variabili, $(\ell - h)$ şi h, a căror sumă este *constantă* , ℓ . Atunci produsul lor este *maxim* când factorii sunt *egali* : $\ell - h = h \;\rightarrow\; h = \ell / 2$, (5)

$$\nu_{min} = \frac{1}{\pi}\frac{2}{l}\sqrt{\frac{p_0}{\rho}} = 2{,}0 \text{ Hz} . \quad (6)$$

2.3.24. ***Se dă ciclul* Joule *din figură. Transcrieţi-l şi în celelalte diagrame :*** V - T , p - T. ***Cunoscând temperaturile*** $T_{1,2,3}$ ***şi exponentul adiabatic*** γ ***, calculaţi randamentul ciclului. Comparaţi cu randamentul ciclului*** **Carnot** ***funcţionând între temperaturile extreme.***

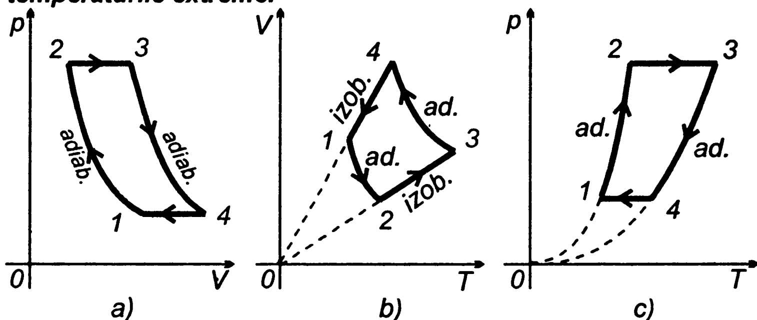


Fig.2.3.24

Rezolvare. Putem afla temperatura T_4 folosind ecuaţia adiabatei în p, T: pV^{γ} + const $\rightarrow TV^{\gamma-1}$ = const $\rightarrow p^{(1-\gamma)/\gamma}\, T$ = const, (1)

$T_2 / T_1 = (p_1 / p_2)^{(1-\gamma)/\gamma} = (p_4 / p_3)^{(1-\gamma)/\gamma} = T_3 / T_4 \rightarrow T_4 = T_1 T_3 / T_2$ (2)

(rezultatul se obţine imediat cu ajutorul teoremei de la problema 1.4.32). $\quad Q_1 = \nu C_p(T_3 - T_2)$, $\quad |Q_2| = \nu C_p(T_4 - T_1)$, (3)

$$h = 1 - |Q_2| / Q_1 = 1 - (T_4 - T_1) / (T_3 - T_2) =$$

$$= 1 - T_1 \cdot (T_3 / T_2 - 1) : (T_3 - T_2) = 1 - T_1 / T_2 . \quad (4)$$

$$\eta_C = 1 - T_1 / T_3 > \eta , \text{ deoarece } T_3 > T_2 . \quad (5)$$

2.3.25. ***Un mol de gaz perfect efectuează un ciclu*** **Carnot** ***inversat între temperaturile*** $T_{1,2}$. ***În cursul destinderii adiabatice gazul efectuează lucrul mecanic*** L_{ad} = 3,24 J, ***iar în cursul destinderii izoterme*** **entropia** ***gazului creşte cu*** ΔS = 24,9 J/K.

Ştiind că pentru a încălzi izobar acelaşi mol de gaz cu ΔT = = 100 K *trebuie căldura* Q_p = 2,08 kJ *(se dă R), aflaţi :* a) *Căldura molară izocoră* C_v *a gazului,* b) *De câte ori creşte volumul gazului în destinderea izotermă* T_2 , c) *Diferenţa temperaturilor* $T_{1,2}$. d) *Reprezentaţi grafic ciclul în diagramele* p - V , V - T , p - T , T - S .

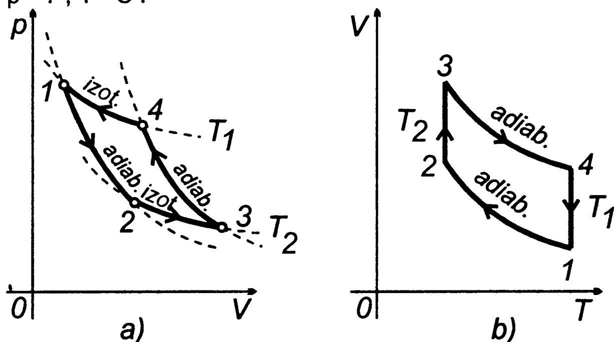


Fig.2.3.25

Ciclul CARNOT inversat

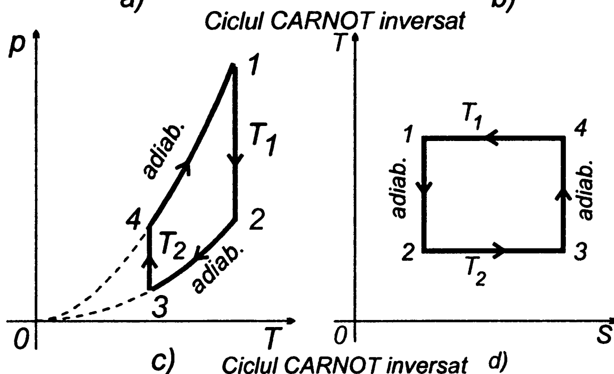


Fig.2.3.25

Ciclul CARNOT inversat

Rezolvare. a) $Q_p = \nu C_p \Delta T$, $C_v = C_p - R =$
$= Q_p / (\nu \Delta T) - R = 12{,}4$ J/(mol · K) . (1)

b) Pe *izotermă* variaţia **entropiei** este

$\Delta S_T = \nu R \ln(V_3 / V_2) \;\rightarrow\; V_3 / V_2 = \exp\{\Delta S_T / (\nu R)\} = 20$, (2)

$L_{ad} = - \nu C_v (T_2 - T_1) \;\rightarrow\; T_1 - T_2 = L_{ad} / (\nu C_v) = 260$ K . (3)

* **2.3.26.** ***Randamentul ciclului Carnot este influenţat mai puternic de temperatura sursei calde sau de temperatura sursei reci ?***

Rezolvare. Randamentul ciclului *Carnot* : $\eta = 1 - T_2/T_1$. (1)

Diferenţiem această relaţie considerând întâi o creştere dT a temperaturii T_1 a sursei calde : $d\eta = (T_2 / T_1)\, dT / T_1$. (2)

Diferenţiem acum randamentul considerând o creştere egală dT a temperaturii T_2 a sursei reci : $d\eta = - dT / T_1$. (2)

Se vede imediat că în al doilea caz randamentul se schimbă mai mult (fiindcă $T_2 < T_1$), şi anume :

Randamentul ciclului **Carnot** *creşte* mai mult dacă *micşorăm* temperatura sursei *reci*, decât dacă *mărim* cu *acelaşi* număr de grade temperatura sursei *calde*.

*** 2.3.27.** ***Aflaţi randamentul ciclului din figură ştiind exponentul adiabatic*** γ ***al gazului. Porţiunea 2 - 3 este* liniară. *Reprezentaţi ciclul în diagramele*** $V - T$, $p - T$.

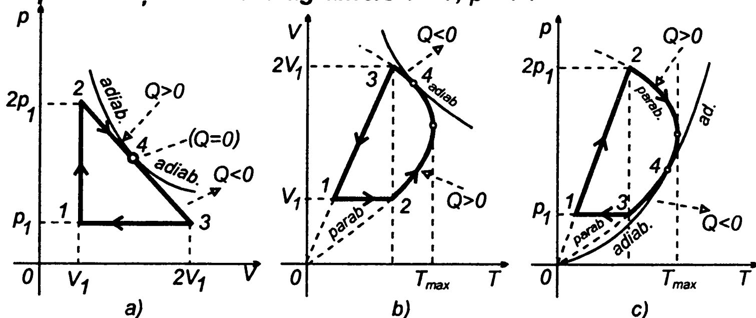


Fig.2.3.27

Rezolvare. Pe porţiunea *2 - 3* există un punct 4 de *tangenţă* cu *adiabata*, astfel încât pe porţiunea *2 - 4* gazul *primeşte* căldură, iar pe porţiunea *4 - 3 cedează* căldură (v. problema 2.2.41).

Ecuaţia transformării *2 - 3* :

$$p - 2p_1 = - (p_1 / V_1)(V - V_1) \quad \text{sau} \quad p = - (p_1 / V_1) V + 3p_1 . \qquad (1)$$

În punctul 4 de tangenţă cu adiabata trebuie să avem :

$$dQ = \nu C_V dT + p dV = 0, \quad \text{dar} \quad \nu R dT = p dV + V dp , \qquad (2)$$

deci $$dQ = \nu C_V (p dV + V dp) / (\nu R) + p dV = 0, \qquad (3)$$

dar prin diferenţierea ecuaţiei (1) : $dp = - (p_1 / V_1)\, dV$, (4)

deci $$dQ = (C_V / R)[\, p dV - V(p_1 / V_1)\, dV] + p dV = 0, \qquad (5)$$

de unde $$(C_V / R)(\, p - V p_1 / V_1) + p = 0, \qquad (6)$$

dar din (1) : $- V p_1 / V_1) = p - 3p_1$,

de aceea $(C_V / R)(\, 2p - 3p_1) + p = 0,$

de unde $$p_4 = 3p_1 / (2 + R / C_V) = 3p_1 / (\gamma + 1) , \qquad (7)$$

apoi din (1): $V_4 = 3V_1 \cdot \gamma / (\gamma + 1)$, (8)

şi din *ecuaţia de stare* : $T_4 = 9p_1 V_1 \gamma : [\nu R(\gamma + 1)^2]$. (9)

$$Q_{24} = \Delta U_{24} + L_{24} = \nu\, C_v(T_4 - T_2) + (2p_1 + p_4)(V_4 - V_1) / 2 =$$
$$= (C_v / R)\,(\nu RT_4 - \nu RT_2) +$$
$$= (1/2)p_1[(2\gamma + 5) / (\gamma + 1)]V_1[(2\gamma - 1) / (\gamma + 1)] =$$
$$= [1/(\gamma - 1)]\,[9p_1 V_1 \gamma : (\gamma + 1)^2 - 2p_1 V_1] + \qquad (10)$$
$$+ (1/2)\, p_1 V_1 (2\gamma + 5)\,(2\gamma - 1) : (\gamma + 1)^2 = (1/2)\, p_1 V_1 (2\gamma - 1)^2 : (\gamma^2 - 1),$$

$$Q_{12} = \nu\, C_v(T_2 - T_1) = (C_v / R)\,(\nu RT_2 - \nu RT_1) =$$
$$= (2p_1 V_1 - p_1 V_1) / (\gamma - 1) = p_1 V_1 / (\gamma - 1). \qquad (11)$$

Căldura absorbită:

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{24} = p_1 V_1\, (4\gamma^2 - 2\gamma + 3)/[2(\gamma^2 - 1). \qquad (12)$$

Lucrul mecanic pe ciclu:

$$L = (1/2)(2p_1 - p_1)(2V_1 - V_1) = (1/2)\; p_1 V_1 , \qquad (13)$$

deci **randamentul**;

$$\eta = L / Q_1 = (\gamma^2 - 1) : (4\gamma^2 - 2\gamma + 3) . \qquad (14)$$

Pentru gaz monoatomic η = 16,5 % , diatomic 12%, triatomic 10 %.

∗ **2.3.28.** ***Un gaz perfect având exponentul adiabatic*** $\gamma = 1,40$ ***suferă o destindere, care în diagrama*** p - V ***se reprezintă printr-o dreaptă de ecuaţie*** $p = aV + b$ ***, unde*** $a = - 1,4 \cdot 10^8$ N/m^5 , b = = $2,4 \cdot 10^5$ N/m^2. ***Calculaţi pe ce porţiune a transformării gazul absoarbe căldură şi pe ce porţiune cedează căldură.***

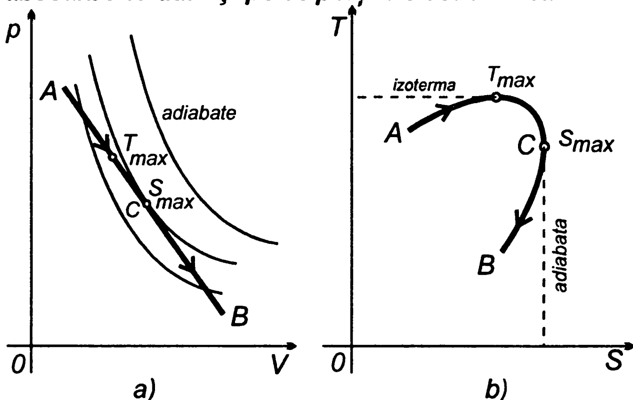


Fig.2.3.28

Rezolvare. Adiabatele (***reversibile***) sunt *izentropice*, adică transformări cu *entropie constantă* :

$$dS = dQ / T = 0 \;\rightarrow\; S = \text{const.} \qquad (1)$$

Semnul variației dS a entropiei este acelaşi cu semnul cantității de căldură schimbată dQ (= TdS), deci când gazul absoarbe căldură, entropia creşte. În diagrama p - V adiabata este mai depărtată de origine, cu cât entropia corespunzătoare este mai mare.

Procesul din problemă se reprezintă în diagrama p - V printr-o dreaptă cu pantă *negativă*. Dacă intersectăm această dreaptă cu familia de *adiabate*, atunci pe măsură ce sistemul evoluează de la A spre B, entropia creşte, deci sistemul primeşte căldură, există apoi un punct C în care dreapta procesului este *tangentă* la o *adia-bată* acolo dS = 0 şi dQ = TdS = 0 (sistemul pe o porțiune infinitezimală nu schimbă căldură cu mediul) şi apoi în continuare entropia scade, deci sistemul cedează căldură. Prin urmare, punctul C căutat corespunde *maximului* entropiei în procesul A - B, adică corespunde condiției dS = 0 (*anularea derivatei* !) (v. expresia entropiei la problema 2.3.38) :

$$dS = \nu(C_v dp/p + C_p dV/V)\Big|_{p=aV+b} = 0\ ,\quad dp = a dV\ , \qquad (2)$$

$$dS = \nu(C_v a dV/p + C_p dV/V) = \nu C_v(a/p + \gamma/V)\, dV = 0,$$

$$a/p + \gamma/V = 0\ ,\qquad a/(aV+b) + \gamma/V = 0\ ,$$

$$V_c = -\gamma b/[a(\gamma+1)] = 1{,}00\ \text{L}\ , \qquad (3)$$

$$p_c = aV_c + b = b/(\gamma+1) = 100\ \text{kPa} \qquad (4)$$

şi din *ecuația de stare* : $T_c = p_c V_c/(\nu R) = -\gamma b^2/[\nu R\, a(\gamma+1)^2]$.

Am obținut pe această cale rezultatul de la problema 2.2.41.

* * **2.3.29.** ***Într-un anumit proces căldura molară a gazului ideal variază după legea*** C = A + BT^2 . ***Cunoscând*** C_v ***stabiliți ecuația procesului în variabilele*** V , T .

Rezolvare. Prin definiție : $C = A + BT^2 = dQ/(\nu dT) =$

$= (dU + p dV)/(\nu dT) = dU/(\nu dT) + (\nu RT/V)\, dV/(\nu dT) =$

$$= C_v + (RT/V)\, dV/dT\ . \qquad (1)$$

Separăm variabilele şi integrăm:

$$R dV/V = (A + BT^2 - C_v)\, dT/T\ , \qquad (2)$$

$$\int R\frac{dV}{V} = R\ln V = \int A\frac{dT}{T} + B\int T dT - \int C_v\frac{dT}{T} =$$

$$= A\ln T + BT^2/2 - C_v \ln T + K\ , \qquad (3)$$

unde K este constanta de integrare,

$\ln V^R = \ln T^A + \ln e^{BT^2/2} - \ln T^{C_v} + K$, $\ln\{V^R T^{C_v - A} e^{-BT^2/2}\} = K$,

deci ecuația procesului :

$$V^R\, T^{C_V - A}\, e^{-BT^2/2} = \text{const.} \qquad (4)$$

∗ ∗ **2.3.30.** a) ***Ce lucru mecanic maxim se poate obține de la două corpuri având masele*** $m_{1,2}$, ***căldurile specifice*** $c_{1,2}$ ***și temperaturile*** $T_{1o} > T_{2o}$ ***? Considerați apoi cazurile particulare :*** **b)** $m_1 = m_2$, $c_1 = c_2$, **c)** ***corpul*** m_2 ***este un termostat.***

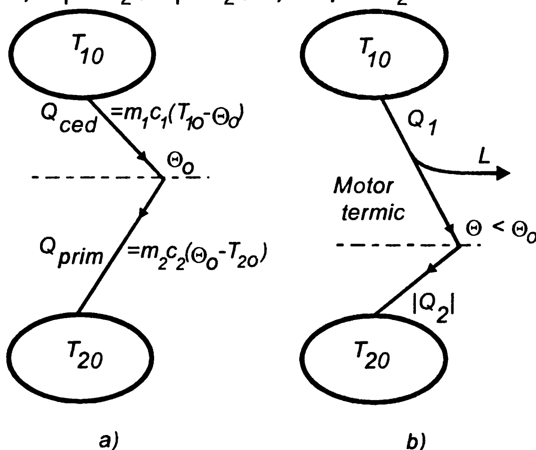


Fig.2.3.30

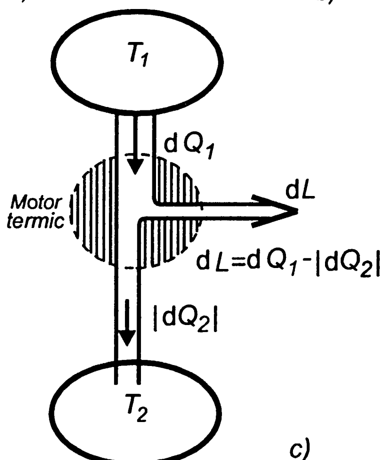


Fig.2.3.30

Rezolvare. Dacă am pune corpurile direct în contact termic între ele, atunci căldura cedată de corpul m_1 ar fi egală cu cea primită de corpul m_2 și sistemul n-ar produce lucru mecanic :

$L = 0$, iar temperatura finală de echilibru ar fi :

$$m_1c_1(T_{1o} - \Theta) = m_2c_2(\Theta - T_{2o}),$$

$$\Theta = (m_1c_1T_{1o} + m_2c_2T_{2o}) : (m_1c_1 + m_2c_2), \quad (1)$$

respectiv $(T_{1o} + T_{2o})/2$, respectiv T_{2o}. (1')

De aceea vom intercala, adică vom pune să funcționeze între corpuri, o *maşină termică* care produce lucru mecanic consumând căldură. Dintre toate maşinile termice care funcționează între două surse date, randamentul *maxim* îl are maşina termică cu ciclul *reversibil* ***Carnot*** al cărui randament ***nu*** depinde de substanța de lucru : $\eta = 1 - T_2/T_1$. (2)

Vom realiza deci o *succesiune* de cicluri *Carnot elementare* între cele două corpuri (surse de căldură) pentru care treptat temperatura corpului cald va scădea (pe măsură ce cedează căldură), iar temperatura corpului rece va creşte (pe măsură ce primeşte căldură) până când temperaturile corpurilor se vor egala (v. figura).

a) La un moment dat ciclul *Carnot* elementar se va desfăşura între temperaturile $T_{1,2}$, căldura primită de substanța de lucru de la corpul m_1, respectiv cedată corpului m_2 şi lucrul mecanic efectuat vor fi : $dQ_1 = m_1c_1(-dT_1)$, $|dQ_2| = m_2c_2\,dT_2$,

$$dL = dQ_1 - |dQ_2| = \eta dQ_1 = (1 - T_2/T_1)\,dQ_1. \quad (3)$$

Într-un ciclu *Carnot* (*reversibil*) raportul căldurilor absorbită/cedată este egal cu raportul temperaturilor absolute (*termodinamice*) ale surselor de căldură (v. problema 2,3,1)(ceea ce reprezintă de fapt egalitatea lui Clausius : variația de entropie pe ciclul **Carnot** *reversibil* este zero):

$$dQ_1/|dQ_2| = T_1/T_2 = -m_1c_1dT_1/(m_2c_2\,dT_2). \quad (4)$$

Separăm variabilele şi integrăm: $m_1c_1dT_1/T_1 = -m_2c_2\,dT_2/T_2$,

$$\int_{T_{10}}^{\Theta} \frac{m_1c_1dT_1}{T_1} = -\int_{T_{20}}^{\Theta} \frac{m_2c_2dT_2}{T_2},$$

$$m_1c_1\ln(\Theta/T_{1o}) = -m_2c_2\ln(\Theta/T_{2o}), \quad (5)$$

de unde rezultă temperatura finală comună Θ a corpurilor :

$$\ln\Theta = (m_1c_1\ln T_{1o} + m_2c_2\ln T_{2o}) : (m_1c_1 + m_2c_2),$$

$$\Theta = \left[T_{1o}^{\,m_1c_1} \cdot T_{2o}^{\,m_2c_2}\right]^{1:(m_1c_1 + m_2c_2)}. \quad (6)$$

Temperatura finală de echilibru Θ (6) a corpurilor este mai *mică* decât în cazul (1) al simplului contact termic.

Lucrul mecanic produs de sistem se poate obține imediat din bilanțul energiilor:

$$L = m_1c_1(T_{1o} - \Theta) - m_2c_2(\Theta - T_{2o})\ . \qquad (7)$$

Randamentul global al sistemului, de producere a lucrului mecanic, se poate defini, de exemplu, astfel:

$$\eta = L / Q_{abs} = L / [m_1c_1(T_{1o} - \Theta)]\ . \qquad (8)$$

b) În cazul particular $m_1 = m_2$, $c_1 = c_2$, găsim :

$$\Theta = \sqrt{T_{10}T_{20}} < (T_{1o} + T_{2o})/2\ , \qquad (9)$$

$$L = mc\left(\sqrt{T_{10}} - \sqrt{T_{20}}\right)^2, \quad \eta = 1 - \sqrt{T_{20}/T_{10}}\ . \qquad (10)$$

c) În acest caz temperatura finală de echilibru : $\Theta = T_{20}$, ($m_2 \to \infty$). Lucrul mecanic realizat se obține prin însumarea (integrarea) lucrurilor mecanice elementare produse de ciclurile *Carnot elementare* : $dL = (1 - T_{2o}/T_1)dQ_1 = (1 - T_{2o}/T_1)\, m_1c_1(-dT_1)$, de unde prin integrare :

$$L = \int dL = \int_{T_{10}}^{T_{20}} m_1c_1\left(-dT_1\right) + \int_{T_{10}}^{T_{20}} \frac{T_{20}m_1c_1dT_1}{T_1} =$$

$$= m_1c_1[T_{1o} - T_{2o} - T_{2o}\ln(T_{1o}/T_{2o})]\ . \qquad (11)$$

Randamentul :

$$\eta = 1 - [T_{2o}/(T_{1o} - T_{2o})]\ln(T_{1o}/T_{2o})\ . \qquad (12)$$

* * **2.3.31.** ***Calculați variația de entropie a unui sistem constituit din*** m = 100 g ***fier și apă în cantitate foarte mare, în urma cufundării fierului încălzit la*** t = 300°C , ***în apa aflată la*** θ = = 13,5°C. ***Se cunoaște căldura specifică a fierului.***

Rezolvare. Deoarece apa este în cantitate foarte mare, temperatura finală de echilibru va fi temperatura apei θ. Atunci variația de entropie a sistemului : $\Delta S = \Delta S_{Fe} + \Delta S_{apă} =$

$$= \int_{Fe} \frac{dQ}{T} + \int_{apa} \frac{dS}{T} = \int_T^{\Theta} \frac{mcdT}{T} + \frac{1}{\Theta}\int dQ =$$

$= mc\ln(\Theta/T) + mc(T - \Theta)/\Theta = mc[T/\Theta - 1 - \ln(T/\Theta)] = 14$ J/K .

* * **2.3.32.** ***La temperaturi foarte joase, apropiate de zero absolut, căldura specifică a solidelor este dată de* legea lui Debye *:*** $c = aT^3$, a = const. ***Calculați căldura necesară unui solid de masă*** m ***pentru a se încălzi de la*** T_1 ***la*** T_2 . ***Care este variația de entropie ?***

Rezolvare. Prin definiție : $c = dQ/(mdT)$, (1)

de unde $dQ = mcdT = maT^3dT$, (2)

$$Q = \int dQ = \int_{T_1}^{T_2} maT^3dT = \frac{1}{4}ma\left(T_2^4 - T_1^4\right). \qquad (3)$$

$$\Delta S = \int dS = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc\,dT}{T} = \int_{T_1}^{T_2} maT^2 dT = \frac{1}{3} ma\left(T_2^3 - T_1^3\right). \quad (4)$$

*** * 2.3.33.** ***Căldura specifică a argintului poate fi aproximată prin formula :*** $c_p = a + bT - c/T^2$, **unde** $a = 222$ J/(kg · K),

$b = 0{,}049$ J/(kg · K^2), $c = 239{,}6$ J · K/kg .

Calculați căldura absorbită și variația de entropie a m = 1,00 kg Ag ***la încălzirea sa de la*** $T_1 = 300$ K ***la*** $T_2 = 1000$ K .

Rezolvare. $dQ = mc_p dT$,

$$Q = \int dQ = \int_{T_1}^{T_2} mc_p dT = \int_{T_1}^{T_2} m\left(a + bT - \frac{c}{T^2}\right) dT =$$

$$= ma(T_2 - T_1) + (1/2)mb(T_2^2 - T_1^2) + mc(1/T_2 - 1/T_1) = 168 \text{ kJ}. \quad (1)$$

$$dS = \frac{dQ}{T}, \quad \Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc_p dT}{T} = \int_{T_1}^{T_2} m\left(\frac{a}{T} + b - \frac{c}{T^3}\right) dT =$$

$$= ma \ln(T_2/T_1) + mb(T_2 - T_1) + (c/2)(1/T_2^3 - 1/T_1^2) = 302 \text{ J/K}. \quad (2)$$

*** * 2.3.34.** ***Calculați variația de entropie la încălzirea unei mase*** m = 0,100 kg ***gheață de la*** $t_g = -20$°C ***până la transformarea sa în vapori la*** $t_f = 100$°C.

Rezolvare. Descompunem procesul în 4 etape :

încălzirea gheții : $$\Delta S_1 = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_g}^{T_0} \frac{mc_g dT}{T} = mc_g \ln \frac{T_0}{T_g}. \quad (1)$$

Topirea gheții : $$\Delta S_2 = \int \frac{dQ}{T_0} = \frac{1}{T_0}\int dQ = \frac{1}{T_0} Q_t = \frac{1}{T_0} m\lambda_g. \quad (2)$$

Încălzirea apei : $$\Delta S_3 = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_f} \frac{mc_a dT}{T} = mc_a \ln \frac{T_f'}{T_0}. \quad (3)$$

Vaporizarea apei: $$\Delta S_4 = \int \frac{dQ}{T_f} = \frac{1}{T_f}\int dQ = \frac{1}{T_f} Q_v = \frac{1}{T_f} m\lambda_v. \quad (4)$$

În total: $\Delta S = \sum \Delta S_i =$

$$= m[c_g \ln(T_o/T_g) + \lambda_g/T_o + c_a \ln(T_f/T_o) + \lambda_v/T_f] = 88 \text{ J/K}. \quad (5)$$

*** * 2.3.35.** ***O masă*** m = 8,0 g ***de oxigen trece de la volumul*** $V_1 = 10{,}0$ L ***la*** $t_1 = 80$°C ***la volumul*** $V_2 = 40$ L **la** $t_2 = 300$°C. ***Calculați variația de entropie.***

Rezolvare. $\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dU + pdV}{T} = \int \frac{\nu C_V dT + pdV}{T} =$

$$= \nu C_V' \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{(\nu RT/V)dV}{T} =$$

$$= \nu C_V \ln(T_2 / T_1) + \nu R \ln(V_2 / V_1) = 5{,}4 \text{ J/K}.$$

* * **2.3.36.** ***O masă*** m = 6,0 g ***de hidrogen trece de la volumul*** $V_1 = 20{,}0$ L ***sub presiunea*** $p_1 = 150$ kPa ***la volumul*** $V_2 = 60$ L ***sub presiunea*** $p_2 = 100$ kPa . ***Calculați variația de entropie.***

Rezolvare. $\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dU + pdV}{T} = \int \frac{\nu C_V dT + pdV}{T}$. (1)

Eliminăm pe T şi dT cu ajutorul *ecuației de stare* $\nu RT = pV$, $\nu RdT = pdV + Vdp$, ca să rămânem numai în variabilele p, V, conform datelor problemei :

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \nu(C_V + R)\frac{dV}{V} + \int_{p_1}^{p_2} \nu C_V \frac{dp}{p} =$$

$$= \nu C_p \ln(V_2 / V_1) + \nu C_V \ln(p_2 / p_1) = 71 \text{ J/K}. \quad (2)$$

* * **2.3.37.** ***O masă*** m = 29 g ***de aer trece din starea în condiții normale în starea cu temperatura*** $t_f = 100^oC$ ***şi presiunea de*** n = = 10 ori ***mai mare. Calculați variația de entropie.***

Rezolvare.

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{\nu C_V dT + pdV}{T} = \int \frac{\nu C_V dT + d(pV) - Vdp}{T} =$$

$$= \int \frac{\nu C_V dT + \nu R dT - Vdp}{T} = \int \frac{\nu C_p dT - (\nu RT/p)dp}{T} =$$

$$= \nu C_p \ln(T_f / T_o) - \nu R \ln(p_2 / p_1) =$$

$$= (m / \mu)R[(7/5)\ln(T_f / T_o) - \ln n] = -15{,}5 \text{J/K}.$$

* * **2.3.38.** ***Un gaz ideal*** **diatomic** ***se destinde după legea*** p = aV , ***unde*** $a = 1{,}0 \cdot 10^8$ N/m^5, ***de la un volum*** $V_1 = 1{,}00$ L ***până la un volum*** $V_2 = 2{,}00$ L. ***Calculați variația de entropie pentru*** 1 **mol** ***de gaz.***

Rezolvare. $\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dU + pdV}{T} =$

$$= \int_{T_1}^{T_2} \nu C_V \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{pdV}{pV/(\nu R)} = \nu C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} . \quad (1)$$

Aceasta este variația entropiei exprimată în variabilele T, V. Putem

exprima foarte uşor variaţia entropiei şi în celelalte perechi de variabile, cu ajutorul *ecuaţiei de stare*, astfel :

$\ln(V_2 / V_1) = \ln [(RT_2 / p_2) : (RT_1 / p_1)] = \ln (T_2 / T_1) - \ln(p_2 / p_1)$,

astfel încât (1) devine : $\Delta S = \nu C_p \ln (T_2 / T_1) - \nu R \ln(p_2 / p_1)$. (2)

La fel, $\ln (T_2 / T_1) = \ln\{ [p_2V_2 / (\nu R)] : [p_1 V_1 / (\nu R)] \} =$

$= \ln (p_2 / p_1) + \ln(V_2 / V_1)$,

astfel încât (1) devine : $\Delta S = \nu C_v \ln (p_2 / p_1) + \nu C_p \ln (V_2 / V_1)$. (3)

Observăm că **entropia *este o funcţie de stare***, deci ΔS depinde numai de stările extreme *1, 2* şi nu depinde de transformarea cvasistatică (de echilibru) care duce de la *1* la *2* .

Revenim la problema noastră :

$\Delta S = \nu C_v \ln [aV_2 / (aV_1)] + \nu C_p \ln (V_2 / V_1) =$

$= \nu(C_v + C_p) \ln (V_2 / V_1) = \nu\, 6\, R \ln (V_2 / V_1) = 34{,}5$ J/K . (4)

*** * 2.3.39.** ***O cantitate*** ν mol ***de gaz perfect având exponentul adiabatic*** γ ***suferă o transformare* politropică *de exponent*** k . ***Calculaţi variaţia de entropie, cunoscând : a) temperaturile*** $T_{1,2}$ (TV^{k-1} = const) , **b)** ***volumele*** $V_{1,2}$ (pV^k = const) , **c)** ***presiunile*** $p_{1,2}$ ($Tp^{(1-k)/k}$ = const) .

Rezolvare. $dS = dQ / T$, $dQ = dU + dL = \nu C_v dT + p dV$. (1)

a) Să exprimăm lucrul mecanic elementar $dL = pdV$ prin dT. Să diferenţiem logaritmic ecuaţia procesului politropic TV^{k-1} = const: :

$dT / T + (k - 1)dV / V = 0$ sau $dT / T + (k - 1)dV : (\nu RT / p) = 0$, (2)

de unde $dL = pdV = - [\nu R / (k - 1)]\, dT$, (3)

astfel încât : $dQ = \nu C_v\, dT + [\nu R / (1 - k)]\, dT =$

$\nu[C_v + R / (1 - k)]\, dT = \nu C_k\, dT$, (4)

unde $C_k = C_v + R / (1 - k)$ (5)

este ***căldura molară în procesul politropic*** . Am regăsit rezultatul cunoscut şi puteam să-l folosim de la început .

$$\Delta S = \int dS = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\nu C_k dT}{T} = \nu C_k \ln\frac{T_2}{T_1} =$$

$= \nu[C_v + R / (1 - k)] \ln(T_2 / T_1) = \nu[(k - \gamma) / (k - 1)]C_v \ln(T_2 / T_1)$, (6)

unde γ este exponentul adiabatic, $\gamma = C_p / C_v = c_p / c_v$.

b) Putem obţine expresia variaţiei entropiei în variabila V în mai multe moduri, de exemplu, din (2) avem imediat :

$dT / T = (1 - k)dV / V$, (7)

astfel încât : $\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\nu C_k dT}{T} = \nu C_k (1-k) \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} =$

$= \nu[C_v + R/(1-k)](1-k)\ln(V_2/V_1) = \nu(\gamma - k)C_v \ln(V_2/V_1)$ (8)

sau direct din (6) înlocuind raportul temperaturilor :

$T_2/T_1 = (V_1/V_2)^{k-1}$ din $TV^{k-1} = \text{const.}$ (9)

c) Expresia variației entropiei în variabila p iarăşi se poate obține în mai multe moduri, de exemplu, exprimăm raportul volumelor din (8): $V_2/V_1 = (p_1/p_2)^{1/k}$ din $pV^k = \text{const}$, (10)

atunci (8) devine :

$\Delta S = \nu(\gamma - k)C_v(-1/k)\ln(p_2/p_1) = \nu[(k-\gamma)/k]C_v \ln(p_2/p_1)$ (11)

sau plecăm de la (6) înlocuind raportul temperaturilor :

$T_2/T_1 = (p_1/p_2)^{(1-k)/k}$ din $Tp^{(1-k)/k} = \text{const}$. (12)

* * **2.3.40.** ***Două vase de volume*** $V_{1,2}$ ***conțin mase*** $m_{1,2}$ ***de gaze diferite, cu masele molare respective*** $\mu_{1,2}$ ***la aceeaşi temperatură. Vasele se pun în legătură şi gazele se amestecă. Calculați variația de entropie în acest proces .***

Rezolvare. *Entropia este o funcție aditivă de* ***stare.*** Pentru a calcula variația de entropie putem folosi orice proces reversibil cuasistatic (de echilibru) care duce de la starea inițială la cea finală. În cazul problemei date, putem ajunge din starea inițială la cea finală printr-un proces *izoterm* de destindere a fiecărui gaz de la volumul său inițial până la întregul volum $V_1 + V_2$:

$$\Delta S = \int_1 \frac{dQ}{T} + \int_2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_1 dQ + \frac{1}{T}\int_2 dQ = \frac{1}{T}Q_1 + \frac{1}{T}Q_2 =$$

$$= (1/T)\nu_1 RT \ln[(V_1 + V_2)/V_1] + (1/T)\nu_2 RT \ln[(V_1 + V_2)/V_2] =$$

$$= (m_1/\mu_1)R\ln[(V_1 + V_2)/V_1] + (m_2/\mu_2)R\ln[(V_1 + V_2)/V_2].$$

* * **2.3.41.** ***Un vas termoizolat este împărțit în două compartimente de volume*** $V_{1,2}$ ***printr-un perete. În compartimentul*** V_1 ***este o cantitate*** ν ***de gaz perfect, iar celălalt compartiment este vidat. Se înlătură peretele şi gazul se destinde. Calculați variația de entropie.***

Rezolvare. *Entropia este o funcție aditivă de* ***stare.*** Pentru a calcula variația de entropie într-un proces ***ireversibil*** (ca cel din problemă) care uneşte două stări de *echilibru* termodinamic este suficient să imaginăm un proces *reversibil* cuasistatic (de echilibru) care să conducă de la starea inițială la cea finală.

În cazul problemei date, sistemul este izolat termic de exterior, deci *nu* schimbă căldură cu mediul exterior. De asemenea, la destinderea *liberă în vid* gazul *nu efectuează lucru mecanic*. Atunci *principiul* I al termodinamicii ne dă :

$$\Delta U = Q - L = 0 \quad \rightarrow \quad U = \text{const} . \qquad (1)$$

Dar energia internă a gazului perfect depinde *numai de temperatură* (*legea lui* ***Joule*** şi experimentul lui ***Joule*** ca cel din problemă). Prin urmare, în procesul ***ireversibil*** din problemă, temperatura finală a gazului este aceeaşi cu cea iniţială. Acum putem trece din starea iniţială în starea finală printr-un proces *izoterm reversibil*,

deci $$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int dQ = \frac{1}{T} Q =$$

$$= (1 / T)\, \nu R T \ln [(V_1 + V_2) / V_1] = \nu R \ln [(V_1 + V_2) / V_1] . \qquad (2)$$

* * *

3. TEORIA CINETICO-MOLECULARĂ

3.1. ***Un fascicul paralel de molecule de azot*** (N_2) ***având viteza*** $v = 400$ m/s ***cade pe un perete sub unghiul de incidență*** $\alpha = 30^o$. ***Concentrația moleculelor din fascicul este*** $n = 9{,}0 \cdot 10^{24}$ m^{-3} . ***Aflați presiunea exercitată pe perete considerând ciocnirea perfect*** **elastică .**

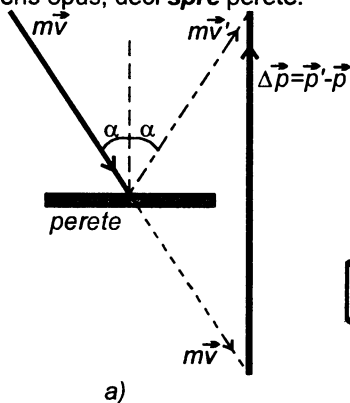
Rezolvare. Întâi să calculăm forța exercitată pe perete. Forța se calculează prin variația de impuls pe unitatea de timp, conform *principiului fundamental* (II) al mecanicii :

$$\vec{F} = \Delta\vec{p} : \Delta t \quad , \quad F = |\Delta\vec{p}| : \Delta t . \tag{1}$$

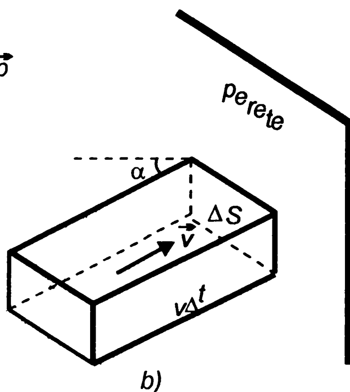
Pentru o singură particulă variația de impuls la ciocnirea oblică, perfect *elastică*, cu un *perete* ,este

$$|\Delta\vec{p}| = |\vec{p}\,' - \vec{p}| = 2\,mv\cos\alpha\,, \tag{2}$$

deci forța exercitată asupra particulei este normală la perete şi atunci asupra peretelui se va exercita o forță egală în modul şi de sens opus, deci *spre* perete.



a)



b)

Fig.3.1

Să calculăm numărul de particule care sosesc la perete pe o arie ΔS în timpul Δt. Toate aceste particule sunt cele cuprinse în paralelipipedul evidențiat în figură, a cărui muchie este $v\Delta t$ şi al cărui volum este $\Delta V = \Delta S \cdot v\Delta t \cos\alpha$, deci

$$\Delta N = \Delta V \cdot n = \Delta S\, v\Delta t \cos\alpha \cdot n . \qquad (3)$$

Înmulțind cu variația de impuls a unei particule (2) şi împărțind la intervalul de timp Δt (pentru a obține variația de impuls pe *unitatea* de timp) şi în sfârşit, împărțind la aria ΔS, obținem ***presiunea*** :

$$p = \Delta F : \Delta S = \Delta N\, |\Delta \vec{p}\,| : (\Delta S\, \Delta t) =$$

$$= \Delta S\, v\Delta t \cos\alpha \cdot n \cdot 2\, mv \cos\alpha : (\Delta S\, \Delta t) = 2\, mnv^2 \cos^2\alpha . \qquad (4)$$

Dar masa unei molecule $m = \mu / N_A$, deci

$$p = 2\, (\mu / N_A)\, nv^2 \cos^2\alpha = 101 \text{ kPa} . \qquad (5)$$

3.2. ***O odaie este încălzită de la temperatura*** $t_1 = 15^oC$ ***la*** $t_2 = 27^oC$. ***Cu cât la sută s-a schimbat numărul moleculelor de aer din cameră ?***

Rezolvare. Numărul de moli ν se poate calcula în trei feluri :

$$\nu = m / \mu = N / N_A = V / V_\mu . \qquad (1)$$

Atunci *ecuația de stare* se scrie :

$$pV = (m / \mu)RT = (N / N_A)\, RT = (V / V_\mu)\, RT = N\, kT\, ,\ k = R / N_A\, , \qquad (2)$$

unde k este *constanta lui* ***Boltzmann***. Atunci raportul cerut este

$$(N_2 - N_1) / N_1 = [pV / (kT_2) - pV / (kT_1)] : [pV / (kT_1)] =$$

$$= (T_1 - T_2) / T_2 = -\, 4{,}0\ \% , \qquad (3)$$

numărul moleculelor **scade** cu 4 % .

3.3. ***Calculați viteza pătratică medie (viteza termică) a moleculelor unui gaz, ştiind densitatea sa*** $\rho = 1{,}20$ kg/m^3 ***şi presiunea*** p = 100 kPa.

Rezolvare. $v_T = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$, dar $pV = (m / \mu)RT$ şi $\rho = m / V$, (1)

$$v_T = \sqrt{\frac{3pV}{m}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = 500 \text{ m/s} . \qquad (2)$$

3.4. ***Calculați concentrația moleculelor de azot şi densitatea sa ştiind presiunea*** p = 56 kPa ***şi viteza pătratică medie*** $v_T = 600$ m/s.

Rezolvare. $p = (1/3)\, nm_o \overline{v^2} = (1/3)\, n(\mu / N_A) \cdot v_T^2$,(1)

$$n = N_A \cdot 3p : (\mu\, v_T^2) = 1{,}0 \cdot 10^{25}\ \text{m}^{-3}\ , \qquad (2)$$

$\rho = n\, m_o = 3p / v_T^2 = 0{,}467$ kg/m³ . (3)

3.5. ***Calculați energia internă a unui gaz ideal diatomic care se află la presiunea*** p = 100 kPa , ***are densitatea*** ρ = 1,25 kg/m³ ***şi masa*** m = 10,0 g .

Rezolvare. $U = \nu C_V T = \nu\,(5R/2)T = (5/2)\,pV =$

$= (5/2)\,p\,m/\rho = 2{,}00$ kJ .

3.6. ***O masă*** m = 14 g N_2 ***se află într-un vas închis la temperatura inițială*** t_1 = 27°C . a) ***Câtă căldură trebuie transmisă gazului pentru a mări viteza pătratică medie a moleculelor de*** n = 2,0 ori ***?*** b) ***De câte ori cresc presiunea şi densitatea ?***

Rezolvare. a) $Q = \nu C_V(T_2 - T_1) = \nu C_V\, T_1(T_2/T_1 - 1)$, (1)

dar

$$v_T = \sqrt{3RT/\mu}\ ,\qquad v_{T_2}/v_{T_1} = \sqrt{T_2/T_1}\ , \qquad (2)$$

$$Q = (m/\mu)C_V T_1\left(v_{T_2}^2 / v_{T_1}^2 - 1\right) = (m/\mu)(5R/2)(n^2 - 1) = 9{,}35 \text{ kJ}. \quad (3)$$

b) Transformarea *izocoră* :

$p_2/p_1 = T_2/T_1 = n^2 = 4{,}0$; $\rho = m/V$, $\rho_2/\rho_1 = 1{,}00$. (4)

3.7. ***Volumul unei mase*** m = 12,0 g ***de gaz ideal a fost mărit izoterm de*** n = 2,0 ori ***consumând căldura*** Q = 693 J . ***Aflați viteza pătratică medie (viteza termică) a moleculelor gazului .***

Rezolvare. $Q = (m/\mu)RT\ln(V_2/V_1) = (m/\mu)RT\ln n$, (1)

$$v_T = \sqrt{3RT/\mu} = \sqrt{3Q/(m\ln n)} = 500 \text{ m/s} . \qquad (2)$$

3.8. ***O masă*** m = 3,04 g ***de gaz ideal se destinde izoterm de la un volum inițial*** V_1 = 1,00 L ***până la o presiune finală normală. Viteza pătratică medie a moleculelor este*** u = 1,00 km/s . ***Calculați :*** a) ***Lucrul mecanic efectuat de gaz,*** b) ***căldura absorbită,*** c) ***Variația energiei interne.***

Rezolvare. a) $L = (m/\mu)RT\ln(V_2/V_1)$, dar $u = \sqrt{3RT/\mu}$,

$p_2V_2 = (m/\mu)RT$, (1)

de unde rezultă $RT/\mu = u^2/3$, $V_2 = mRT/(\mu p_2) = mu^2/(3p_2)$,

$L = (1/3)mu^2 \ln[mu^2/(3p_2) : V_1] = 2{,}3$ kJ . (2)

b) $Q = L$, c) $\Delta U = 0$ (*izoterma* gazului ***ideal*** !) . (3)

3.9. ***Un gaz are densitatea*** ρ = 1,10 kg/m³ ***la presiunea*** p = = 94,66 kPa ***şi temperatura*** t = 27°C, ***Calculați viteza pătratică medie a moleculelor şi masa molară a gazului.***

Rezolvare. $v_T = \sqrt{3RT/\mu}$, dar $\rho = \mu p/(RT)$, (1)

$v_T = \sqrt{3p/\rho} = 508$ m/s , (2)

$\mu = \rho RT/p = 0{,}029$ kg/mol (probabil aer) . (3)

3.10. ***Într-un vas de volum*** V = 2,00 L ***se află*** m = 16 g O_2 ***la presiunea*** p = 106,66 kPa. **Aflaţi : a)** ***Viteza pătratică medie a moleculelor,*** **b)** ***Numărul total de molecule,*** **c)** ***Energia internă a gazului.***

Rezolvare. a) $v_T = \sqrt{3RT/\mu}$, dar $pV = (m/\mu)RT$,

$v_T = \sqrt{3pV/m} = 200$ m/s . (1)

b) $N = \nu N_A = (m/\mu)N_A = 3{,}0 \cdot 10^{25}$. (2)

c) $U = \nu C_v T = (C_v/R)\,\nu RT = (C_v/R)\,pV = (5/2)\,pV = 533$ J. (3)

($C_v = 5R/2$ la gaze *diatomice*) .

3.11. ***Încălzind un gaz cu*** ΔT = 100 K ***viteza pătratică medie a moleculelor a crescut de la*** v_{T_1}= 400 m/s ***la*** v_{T_2}= 500 m/s. ***Aflaţi masa molară a gazului (se dă constanta*** R***).***

Rezolvare. $v_{T_1}^2 = 3RT_1/\mu$, $v_{T_2}^2 = 3R(T_1 + \Delta T)/\mu$, (1)

$\mu = 3R\Delta T : (v_{T_2}^2 - v_{T_1}^2) = 0{,}028$ kg/mol (probabil azot) . (2)

3.12. ***Calculaţi numărul de molecule din*** **unitatea** ***de*** **masă** ***a unui gaz, cunoscând viteza pătratică medie a moleculelor*** v_T=500 m/s ***la temperatura*** t =0°C ***şi constanta lui Boltzmann*** k.

Rezolvare. $v_T^2 = 3RT/\mu$, $n^* = N/m = \nu N_A/(\nu\mu) = N_A/\mu =$

$= N_A v_T^2/(3RT) = v_T^2/(3kT) = 2{,}2 \cdot 10^{25}$ kg^{-1} . (1)

Observăm că $n^* = N_A/\mu = 1/m_o$, unde m_o este masa *unei singure* molecule.

3.13. ***În aer se află în suspensie*** **fum** ***format din particule fine de masă*** m_f = 0,010 μg. ***De câte ori este mai mică viteza pătratică medie a particulelor de fum decât cea a moleculelor de aer ? Dar energia cinetică medie ?***

Rezolvare. Particulele de fum formează un "gaz" ("nor") care va fi în *echilibru termic* cu moleculele de aer. Or, condiţia de echilibru termic înseamnă egalitatea energiilor *cinetice medii de* ***translaţie*** ale particulelor :

$$\frac{1}{2}m_f\overline{v_f^2} = \frac{1}{2}m_a\overline{v_a^2} = \frac{3}{2}kT \quad (1)$$

sau $v_{Tf} = \sqrt{3kT/m_f}$, $v_{Ta} = \sqrt{3kT/m_a} = \sqrt{3kT/(\mu_a/N_A)}$, (2)

$$v_{Ta}/v_{Tf} = \sqrt{N_A m_f / \mu_a} = 14 \cdot 10^6 , \quad (3)$$

$$v_{Tf} = \sqrt{3kT/m_f} \approx 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ mm/s} . \quad (4)$$

$$\overline{\varepsilon_a} = 5kT/2 , \quad \overline{\varepsilon_f} = 6kT/2 = 3kT ; \quad \overline{\varepsilon_a} : \overline{\varepsilon_f} = 5/6 , \quad (5)$$

$$\overline{\varepsilon_f} = 3kT \approx 4 \cdot 10^{-23} \text{ J} . \quad (6)$$

Observăm că moleculele de aer au 5 grade de libertate (3 de translație + 2 de rotație conform modelului "*halteră*" pentru moleculele *diatomice*), iar particulele de fum au 6 grade de libertate (3 translații + 3 rotații, ca la un corp *rigid*). În timp ce *energiile cinetice sunt practic egale*, **vitezele** termice sunt total diferite , din cauza maselor total diferite ale particulelor.

3.14. ***Gazul dintr-un cilindru se destinde, pistonul deplasându-se cu viteza*** u = 1,00 m/s . ***Cu cât la sută din energia sa cinetică pierde o moleculă de viteză*** v = 400 m/s ***care ciocneşte perfect elastic, frontal, pistonul ?***

Rezolvare. Luând sensul pozitiv al axei *Ox* în sensul vitezei *v*, putem aplica formulele cunoscute din mecanică :

$$v' = 2u - v , \quad u' = u \quad (1)$$

sau putem judeca direct : La ciocnirea frontală perfect elastică cu un perete *fix* particula îşi schimbă doar sensul vitezei. Atunci trecem la un SR legat de perete. Față de perete (piston) molecula are viteza reltivă $v - u$, deci după ciocnire va avea viteza $-(v - u) = = u - v$. Trecând înapoi la SR legat de laborator trebuie să adăugăm u :

$$v' = 2u - v . \quad (2)$$

$$-\Delta E_c / E_c = [m_o v^2/2 - m_o(2u - v)^2/2] : (m_o v^2/2) =$$

$$= (4uv - 4u^2) / v^2 = (4u/v)(1 - u/v) \approx 4\, u/v = 1,0\ \%, \ (u \ll v). \quad (3)$$

3.15. ***Unui vas conținând azot i se imprimă brusc viteza*** v_o = 10 m/s . ***Aflați variația de temperatură a gazului , la echilibru termic.***

Rezolvare. În SR legat de vas toate moleculele capătă brusc energia cinetică suplimentară (1/2) $m_o v_o^2$ care treptat se distribuie statistic uniform pe toate gradele de libertate de mişcare ale moleculelor, prin intermediul ciocnirilor, ceea ce reprezintă o creştere de temperatură :

$$(1/2)\, m_o v_o^2 = (i/2) k \Delta T , \quad i = 5 \text{ (gaz } diatomic\text{)} , \quad (1)$$

$$\Delta T = m_o v_o^2 / (i\, k) = \mu v_o^2 / (5R) \approx 0,07 \text{ K} . \quad (2)$$

3.16. ***La ce temperatură energia cinetică medie a atomilor de heliu este suficientă pentru a învinge atracția gravitațională terestră și a părăsi atmosfera ?***

Rezolvare. Energia cinetică medie (1/2) $m_o v_T^2$ trece în energia *potențială* gravitațională care crește de la $-\gamma m_o M / R_P$ (R_P, M - raza și masa Pământului) până la zero :

$$(1/2)\, m_o v_T^2 = 0 - (-\gamma m_o M / R_P) = m_o R_P g_o \,, \qquad (1)$$

unde $g_o = \gamma M / R_P^2$) este accelerația gravitațională la nivelul mării.

Reamintim expresia energiei *potențiale* de interacție gravitațională între două puncte materiale sau două sfere omogene:

$$E_p = -\gamma m_1 m_2 / r^2 \,, \quad \gamma \text{ - constanta gravitațională} . \qquad (2)$$

$$(1/2)\, m_o v_T^2 = 3kT/2 = m_o g_o R_P = (\mu / N_A)\, g_o R_P \,, \qquad (3)$$

$$T = (2/3)\, \mu\, g_o R_P / R = 20 \text{ kK} \,, \quad (k = R / N_A) . \qquad (4)$$

3.17. ***Calculați căldurile specifice*** $c_{v,p}$ ***ale unui gaz ideal diatomic, știind densitatea sa în condiții*** **normale :** $\rho_o = 1{,}43$ kg/m^3. ***Se dă fie volumul molar al gazelor ideale în condiții normale,*** $V_{\mu o}$, ***fie presiunea și temperatura*** **normale .**

Rezolvare. $C_v = 5R/2$, $c_v = C_v / \mu = 5R / (2\mu)$, (1)

dar $\rho_o = \mu / V_{\mu o}$, $c_v = 5R / (2\rho_o V_{\mu o}) = 650$ J/(kg · K) (2)

sau altfel $\rho_o = \mu p_o / (RT_o)$, $c_v = 5p_o / (2\rho_o T_o)$; (3)

$c_p = \gamma c_v = 910$ J/(kg · K) ($\gamma = 1{,}40$ pentru gaze *diatomice*)

sau $c_p = c_v + R / \mu = 7p_o / (2\rho_o T_o)$. (4)

3.18. ***Calculați căldurile specifice*** $c_{v,p}$ ***ale unui gaz , știind raportul lor*** $\gamma = 1{,}40$ ***și densitatea gazului în condiții normale*** $\rho_o = 1{,}293$ kg/m^3 .

Rezolvare. $C_p - C_v = R$, $c_p - c_v = R / \mu$,

$c_p / c_v = C_p / C_v = \gamma$, $\rho = \mu p / (RT)$, (1)

$c_v = R : [(\gamma - 1)\, \mu] = p : [(\gamma - 1)\, \rho T] = 720$ J/(kg · K) , (2)

$c_p = \gamma R : [(\gamma - 1)\, \mu] = \gamma p : [(\gamma - 1)\, \rho T] = 1010$ J/(kg · K) , (2)

3.19. ***Calculați căldura specifică izocoră a unui gaz diatomic cunoscând viteza pătratică medie a moleculelor sale*** v_T = = 600 m/s ***la temperatura*** $t = 27^oC$.

Rezolvare. $v_T^2 = 3RT/\mu$, $C_v = 5R/2$, (1)

$c_v = C_v/\mu = 5R/(2\mu) = (5/2)\,v_T^2/(3T) = 1000$ J/(kg · K) . (2)

3.20. ***Exprimați căldurile molare și specifice ale unui amestec de gaze ideale, cunoscând compoziția amestecului prin fracțiunile molare (sau volumice)*** r_i ***sau prin fracțiunile masice (în greutate)*** g_i. ***Stabiliți formulele de trecere între*** r_i ***și*** g_i .

Rezolvare. $Q = \nu\, C_v\Delta T = \sum \nu_i C_{vi}\Delta T \rightarrow$

$$C_v = \sum(\nu_i/\nu)C_{vi} = \sum r_i C_{vi}\ , \quad C_p = \sum r_i C_{pi}\ . \quad (1)$$

$$Q = m\, c_v\Delta t = \sum m_i c_{vi}\Delta t \rightarrow$$

$$c_v = \sum(m_i/m)c_{vi} = \sum g_i c_{vi}\ , \quad c_p = \sum g_i c_{pi}\ , \quad (2)$$

Cum $m_i = \nu_i \mu_i = r_i\, \nu\, \mu_i = g_i m$,

$$\sum r_i = 1 = \sum g_i\ , \quad \sum r_i \mu_i = m/\nu\ , \sum(g_i/\mu_i) = \nu/m\ , \quad (3)$$

rezultă $r_i = (g_i/\mu_i) : (\nu/m) = (g_i/\mu_i) : \sum(g_k/\mu_k)$, (4)

$$g_i = r_i \mu_i : (m/\nu) = r_i \mu_i : \sum r_k \mu_k\ . \quad (5)$$

3.21. ***Un amestec de azot și hidrogen are densitatea*** $\rho = 0{,}30$ kg/m^3 ***la temperatura*** t = 47°C ***și presiunea*** p = 2,00 atm. ***Aflați concentrațiile moleculelor de azot*** (n_1) ***și de hidrogen*** (n_2) ***Se dau constantele*** R ***și*** N_A .

Rezolvare. Cunoscuta formulă a presiunii se scrie:

$$p = (n_1 + n_2)kT\ , \quad k = R/N_A\ . \quad (1)$$

Pe de altă parte, dacă m_{o1} , m_{o2} sunt masele moleculelor de azot, respectiv hidrogen, atunci densitatea ρ, adică masa ***unității de volum*** , este , evident,

$$\rho = n_1 m_{o1} + n_2 m_{o2} = n_1 \mu_1/N_A + n_2 \mu_2/N_A\ . \quad (2)$$

Din ecuațiile (1) , (2) rezultă :

$$n_1 = N_A(\rho RT - \mu_2 p) : [RT(\mu_1 - \mu_2)] = 3{,}5 \cdot 10^{24}\ \mathrm{m}^{-3}\ , \quad (3)$$

$$n_2 = N_A(\rho RT - \mu_1 p) : [RT(\mu_2 - \mu_1)] = 4{,}2 \cdot 10^{25}\ \mathrm{m}^{3}\ . \quad (4)$$

3.22. ***Într-un vas se află azot*** **(1)** ***și hidrogen*** **(2)*****. La o temperatură*** T ***azotul este complet*** **disociat,** ***iar hidrogenul nu, presiunea fiind*** p. ***La temperatura*** nT , n = 3,0 , ***sunt disociate complet ambele gaze și presiunea este*** rp , r = 4,0 . ***Aflați raportul maselor azotului și hidrogenului, precum și raportul cantităților (de substanță) (adică raportul numerelor de moli)***

de azot şi hidrogen, aflate iniţial în vas, înainte de disocierea lor.

Rezolvare. Dacă m_1 este masa azotului, atunci $N_A\, m_1/\mu_1$ este numărul moleculelor N_2 şi prin disociere completă obţinem $2\, N_A\, m_1\, /\, \mu_1$ *atomi.* La temperatura T şi presiunea p ecuaţia de *stare* se scrie : $pV = (N_1 + N_2)kT = (2\, N_A\, m_1 / \mu_1 + N_A\, m_2 / \mu_2)kT =$

$$= (2\, m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)\, RT\, . \qquad (1)$$

Analog, la temperatura nT şi presiunea rp avem :

$$rp \cdot V = (2\, m_1 / \mu_1 + 2m_2 / \mu_2)\, R \cdot nT\, . \qquad (2)$$

Împărţind membru la membru cele două ecuaţii, obţinem

$$r = 2n\, (m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2) : (2\, m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)\, . \qquad (3)$$

Împărţind numărătorul şi numitorul fracţiei cu m_2 ,obţinem raportul:

$$m_1 / m_2 = (\mu_1/\mu_2)\,(2n - r)/[2(r - n)] = 14\, . \qquad (4)$$

Observăm că *masa* se măsoară cu ***kilogramul***, iar ***cantitatea de substanţă*** se măsoară cu ***molul***. Atunci raportul iniţial de moli va fi : $\nu_1 / \nu_2 = (m_1 / \mu_1) : (m_2 / \mu_2) =$

$$= (m_1 / m_2)(\mu_2 / \mu_1) = (2n - r)/[2(r - n)] = 1{,}00\, . \qquad (5)$$

3.23. ***Un vas cilindric, izolat adiabatic de exterior, este împărţit în două jumătăţi cu ajutorul unui piston, de masă şi grosime neglijabile, care se poate mişca etanş fără frecări . Iniţial pistonul este blocat, într-un compartiment fiind*** $\nu = 1{,}00$ mol ***de gaz ideal diatomic, la temperatura*** T = 300 K, ***iar celălalt compartiment fiind vidat. Pistonul este deblocat şi gazul se destinde. Apoi se împinge pistonul la loc acţionând din exterior. Aflaţi :*** **a)** ***Variaţia energiei interne a gazului ,*** **b)** ***Raportul în care se schimbă energia cinetică medie a moleculelor.***

Rezolvare. a) Pistonul fiind imponderabil şi vasul izolat adiabatic, avem de fapt o *destindere adiabatică, liberă, în vid* a gazului *ideal*, când temperatura gazului nu se schimbă (experienţa lui *J. P. Joule* din 1843 cu privire la energia internă a unui gaz ideal).

Revenind înapoi la volumul iniţial vom avea o comprimare *adiabatică* :

$$T_2 / T_1 = [V : (V/2)]^{\gamma - 1} \;\rightarrow T_2 = T_1 \cdot 2^{\gamma - 1} = 396\ \text{K}\, , \qquad (1)$$

$\gamma = C_p / C_v = c_p / c_v = 7/5 = 1{,}40$ la gaze *diatomice* ;

$$\Delta U = \nu C_v (T_2 - T_1) = \nu\, (5R/2)\,(T_2 - T_1) = 2{,}0\ \text{MJ}\, . \qquad (2)$$

b) $\overline{\varepsilon} = 5kT/2 \rightarrow \overline{\varepsilon}_2 / \overline{\varepsilon}_1 = T_2 / T_1 = 2^{\gamma - 1} = 1{,}32\, . \qquad (3)$

3.24. ***Exprimați căldurile specifice și molare ale unui gaz diatomic parțial disociat în atomi. Care este gradul de disociere al oxigenului dacă căldura sa specifică izobară a devenit*** $c_p = 1000$ J/(kg · K) ***?***

Rezolvare. *Gradul de disociere* α este raportul dintre numărul de molecule *disociate* și numărul total inițial de molecule sau altfel, este raportul dintre masa de gaz disociată și masa totală .

Prin disociere vom avea un amestec de gaz **di**atomic (nedisociat) și gaz **mono**atomic (format din atomii moleculelor disociate). Procentele de greutate (fracțiunile masice) ale compoziției amestecului vor fi :

$$g_1 = m_1 / m = \alpha\ ,\ \ g_2 = m_2 / m = (m - m_1) / m = 1 - \alpha\ .(1)$$

Acum vom folosi rezultatele problemei 3.20 :

$$c_v = \sum g_i\, c_{vi} = \alpha \cdot 3R / (2A) + (1 - \alpha) \cdot 5R / (2\,\mu),\ \ \text{dar}\ A = \mu / 2,$$

$$c_v = \alpha \cdot 3R / \mu + (1 - \alpha) \cdot 5R / (2\,\mu) = (\alpha + 5)R / (2\,\mu)\ , \qquad (2)$$

$$c_p = \sum g_i\, c_{pi} = \alpha \cdot 5R / (2A) + (1 - \alpha) \cdot 7R / (2\,\mu) = (3\alpha + 7)R / (2\,\mu).(3)$$

Să trecem la fracțiunile de volum : $r_i = (g_i / \mu_i) : \sum(g_k / \mu_k)$,

$$r_1 = (\alpha / A) : [\alpha / A + (1 - \alpha) / \mu] = 2\alpha : (1 + \alpha)\ , \qquad (4)$$

$$r_2 = [(1 - \alpha) / \mu] : [\alpha / A + (1 - \alpha) / \mu] = (1 - \alpha) / (1 + \alpha)\ , \qquad (5)$$

$$C_v = \sum r_i\, C_{vi} = [2\alpha : (1 + \alpha)]\, 3R / 2 + [(1 - \alpha) / (1 + \alpha)]\, 5R / 2 =$$
$$= [(\alpha + 5) / (1 + \alpha)]\, R / 2\ , \qquad (6)$$

$$C_p = \sum r_i\, C_{pi} = [2\alpha : (1 + \alpha)]\, 5R / 2 + [(1 - \alpha) / (1 + \alpha)]\, 7R / 2 =$$
$$= [(3\alpha + 7) / (1 + \alpha)]\, R / 2\ , \qquad (7)$$

$$\gamma = C_p / C_v = c_p / c_v = (3\alpha + 7) / (\alpha + 5)\ . \qquad (8)$$

Pentru oxigenul din problemă :

$$c_p = (3\alpha + 7)R / (2\,\mu)\ \rightarrow\ \alpha = [2\,\mu / (3R)]\, c_p - 7/3 = 23\ \%\ . \quad (9)$$

3.25. ***Exprimați căldura specifică izocoră a unui gaz încălzit până la temperaturi foarte înalte, astfel încât gazul este complet* ionizat. *Aplicație la oxigen.***

Rezolvare. Dintr-un atom cu Z electroni obținem un amestec format din $Z + 1$ particule : un nucleu și separat cei Z electroni. Dacă $m_o = A / N_A$ este masa atomului (A - masa molară) și m_e - masa electronului, atunci fracțiunile în greutate sunt :

$$g_1 = Zm_e / m_o = Zm_e / (A / N_A) \ll 1\ ,\ \text{(deoarece}\ \ m_e \ll m_o),$$

$$g_2 = 1 - g_1 \approx 1\ . \qquad (1)$$

Aplicăm rezultatele de la problema 3.20, observând că masa molară a electronilor $\mu_e = m_e \cdot N_A$:

$$c_v = \Sigma\, g_i\, c_{vi} = [Zm_e : (A / N_A)] \cdot [3R : (2m_e N_A)] + 3R / (2A) =$$
$$= (Z + 1)\, 3R / (2A) = 7{,}0 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)} \quad (2)$$

față de $\quad c_v = 5R / (2\,\mu) = 5R / (4A) = 650 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, (3)

deci căldura specifică a crescut în raportul :

$$(3/2)\,(Z + 1)\,(R / A) : [5R / (4A)] = (6/5)\,(Z + 1) = 10{,}8 \text{ ori} . \quad (4)$$

3.26. ***Într-un vas de volum*** V = 0,50 L **se află** m = 1,00 g ***vapori de iod. La temperatura*** t = 1000°C ***presiunea din vas este*** p = 93 kPa. ***Aflați gradul de disociere*** α ***a moleculelor de iod*** I_2 (μ = 254 g/mol) ***în atomi.*** **Gradul de disociere** α ***este raportul dintre numărul moleculelor*** **disociate** ***şi numărul total inițial de molecule.***

Rezolvare. Prin disociere vom avea un amestec de molecule diatomice I_2 şi de atomi I. Fie N - numărul inițial total de molecule, atunci după disociere vom avea $2\alpha N$ atomi şi $(1 - \alpha)\, N$ molecule în amestec : $\quad pV = [2\alpha N + (1 - \alpha)\, N]\, kT =$ (1)

$= (1 + \alpha)\, NkT = (1 + \alpha)\,(m / \mu)RT$, $\quad \alpha = \mu pV / (mRT) - 1 = 12\ \%$. (2)

3.27. ***Într-un vas la temperatura*** T_1 = 300 K ***se află*** ν_1 = 1,00 mol Ne ***şi*** ν_2 = 2,00 mol H_2, ***presiunea fiind*** p_1 = 100 kPa. ***Când temperatura a crescut la*** T_2 =2400 K ***presiunea a crescut la*** p_2 = =880 kPa. ***Aflați gradul de disociere a moleculelor de hidrogen.***

Rezolvare. Dacă inițial erau ν_2 moli de hidrogen, prin disociere obținem $2\alpha\nu_2$ moli de atomi de hidrogen şi $(1 - \alpha)\nu_2$ moli de molecule de hidrogen, deci $\quad p_1 V = (\nu_1 + \nu_2)RT_1$,

$$p_2 V = [(\nu_1 + 2\alpha\nu_2 + (1 - \alpha)\nu_2\,]RT_2 . \quad (1)$$

Prin împărțirea ecuațiilor membru la membru, obținem :

$$p_2 / p_1 = (T_2 / T_1)\,[\nu_1 / \nu_2 + (1 + \alpha)] : [\nu_1 / \nu_2 + 1]\ , \quad (2)$$

$$\alpha = [p_2 T_1 / (\, p_1 T_2) - 1]\,[\nu_1 / \nu_2 + 1] = 0{,}15 = 15\ \% . \quad (3)$$

3.28. ***O cantitate*** ν_1 = 1,00 mol ***de anhidridă sulfurică*** SO_3 ***se află într-un vas la temperatura*** T_1 = 1000 K, ***la care gradul de disociere este*** α_1 = 0,20 : $\ SO_3 \to SO_2 + (1/2)\, O_2$. ***Dacă în acelaşi vas, în prealabil vidat, introducem acum*** ν_2 = 0,40 mol SO_3 , ***atunci pentru a obține aceeaşi presiune ca înainte temperatura trebuie să fie*** T_2 = 2000 K. ***Aflați gradul de disociere în al doilea caz .***

Rezolvare. Fie ν_1', ν_2' numerele de moli finale în cele două cazuri, atunci, conform reacției de disociere din enunț (ținând seama de coeficienții ***stoechiometrici***):

$$\nu_1' = (3/2)\,\alpha_1\nu_1 + (1 - \alpha_1)\nu_1 = (1 + 0{,}5\,\alpha_1)\,\nu_1\,,$$

$$\nu_2' = (1 + 0{,}5\,\alpha_2)\,\nu_2\,. \qquad (1)$$

Ecuația de stare în cele două cazuri :

$$pV = \nu_1'RT_1 = (1 + 0{,}5\,\alpha_1)\,\nu_1\,RT_1\,,$$

$$pV = \nu_2'RT_2 = (1 + 0{,}5\,\alpha_2)\,\nu_2\,RT_2\,. \qquad (2)$$

De aici obținem $(1 + 0{,}5\,\alpha_1)\,\nu_1 T_1 = (1 + 0{,}5\,\alpha_2)\,\nu_2 T_2 \rightarrow$

$$\alpha_2 = 2(1 + 0{,}5\,\alpha_1)\,\nu_1 T_1 : (\nu_2 T_2) - 2 = 0{,}75\,. \qquad (3)$$

3.29. ***Într-un vas de volum*** V = 1,00 L ***este păstrată o masă*** m = 1,00 g ***tritiu*** $^3T_1$ ***radioactiv. După*** t = 13 ani , ***jumătate din tritiu se transformă în heliu*** $^3He_2$. ***Aflați presiunea finală, temperatura fiind*** t = 27°C .

Rezolvare. Ecuația procesului : $T_2 \rightarrow 2\,He$. **(1)**

În starea inițială avem $\nu = m/\mu$ mol de tritiu (μ = 0,006 kg/mol).
În starea finală vom avea $\nu/2$ mol tritiu plus $2\cdot(\nu/2)$ mol de heliu, conform reacției (1).

$$pV = (m/\mu)\,RT\,,\quad p'V = (\nu/2 + 2\cdot\nu/2)RT = (3/2)\,(m/\mu)\,RT\,, \qquad (2)$$

$$p' = (3/2)\,(m/\mu)\,RT/V = 630\text{ kPa}\,. \qquad (3)$$

3.30. ***Un vas izolat termic de exterior este împărțit printr-un perete subțire termoconductor în două compartimente*** V_1 = = 3,00 L , V_2 = 4,00 L , ***conținând același gaz la presiunile*** p_1 = = 300 kPa, ***respectiv*** p_2 = 200 kPa ***și temperaturile*** t_1 = 27°C, t_2 = 127°C. ***Aflați temperatura finală din compartimente după terminarea procesului de schimb de căldură prin perete, precum și presiunile finale.***

Rezolvare. Căldura cedată de gazul dintr-un compartiment este preluată de celălalt : $\nu_1 C_V(T' - T_1) = \nu_2 C_V(T_2 - T')$, **(1)**

Dar $\nu_1 = p_1V_1/(RT_1)\,,\ \nu_2 = p_2V_2/(RT_2)\,,$ (2)

$$(p_1V_1/T_1)\,(T' - T_1) = (p_2V_2/T_2)\,(T_2 - T')\,,$$

$$T' = (p_1V_1 + p_2V_2) : (p_1V_1/T_1 + p_2V_2/T_2) = 340\text{ K} = 67^\circ C\,. \qquad (3)$$

Gazele din compartimente suferă transformări *izocore* :

$$p_1' = p_1\,T'/T_1 = 340\text{ kPa}\,,\qquad p_2' = p_2\,T'/T_2 = 170\text{ kPa} \qquad (4)$$

3.31. ***Două vase de volume*** $V_1 = 1,00$ L , ***respectiv*** $V_2 = 2,00$ L, ***izolate termic de exterior, sunt legate printr-un mic tub cu robinet. Primul vas conține argon la presiunea*** $p_1 = 100$ kPa ***şi temperatura*** $t_1 = 27^oC$, ***iar al doilea conține azot la presiunea*** $p_2 = 200$ kPa ***şi*** $t_2 = 127^oC$. ***Ce temperatură şi presiune se stabilesc în amestec după deschiderea robinetului ?***

Rezolvare. Sistemul nu primeşte din exterior nici căldură, nici lucru mecanic, de aceea energia internă se conservă. La gaze ideale energia internă depinde *numai de temperatură* (*legea lui Joule*), prin urmare : $\nu_1 C_{v1} T_1 + \nu_2 C_{v2} T_2 = \nu_1 C_{v1} T' + \nu_2 C_{v2} T'$, (1)

dar $\nu_1 = p_1 V_1 / (RT_1)$, $\nu_2 = p_2 V_2 / (RT_2)$, (2)

$$p_1 V_1 C_{v1} + p_2 V_2 C_{v2} = T' [(p_1 V_1 / T_1) C_{v1} + (p_2 V_2 / T_2) C_{v2}] . \quad (3)$$

Notând $C_{v2} / C_{v1} = \varepsilon$, obținem

$$T' = (p_1 V_1 + \varepsilon p_2 V_2) : (p_1 V_1 / T_1 + \varepsilon p_2 V_2 / T_2) = 383 \text{ K} = 110^oC . \quad (4)$$

Scriem acum *conservarea numărului de moli* :

$$p_1 V_1 / T_1 + p_2 V_2 / T_2 = p' (V_1 + V_2) / T' , \quad (5)$$

$$p' = [T' / (V_1 + V_2)] (p_1 V_1 / T_1 + p_2 V_2 / T_2) = 170 \text{ kPa} . \quad (6)$$

3.32. ***În două vase legate printr-un mic tub cu robinet se află respectiv*** $\nu_1 = 1,00$ mol ***de gaz ideal având viteza pătratică medie a moleculelor*** $v_{T1} = 400$ m/s ***şi*** $\nu_2 = 2,00$ mol ***din acelaşi gaz având*** $v_{T2} = 500$ m/s . ***Care va fi viteza pătratică medie în amestecul gazos care se obține după deschiderea robinetului şi stabilirea echilibrului termic ?***

Rezolvare. Considerând sistemul izolat termic de exterior în procesul amestecării, scriem *conservarea energiei interne*:

$$\nu_1 C_v T_1 + \nu_2 C_v T_2 = \nu_1 C_v T' + \nu_2 C_v T' ,$$

$$T' = (\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2) / (\nu_1 + \nu_2) , \quad (1)$$

dar $v_T^2 = 3RT / \mu$, $T = \mu v_T^2 / (3R)$, (2)

atunci obținem $v_T = \sqrt{\dfrac{3RT'}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{\nu_1 v_{T1}^2 + \nu_2 v_{T2}^2}{\nu_1 + \nu_2}} = 470$ m/s . (3)

3.33. ***Două vase identice de volum*** V = 10 L ***fiecare au un perete comun termoizolant în care se află un orificiu închis cu o membrană*** **semipermeabilă** ***de paladiu. În primul vas sunt*** $m_1 = 20$ g Ar ***la temperatura*** $T_1 = 300$ K ***menținută constantă, iar în al doilea*** $m_2 = 2,0$ g H_2 ***la temperatura*** $T_2 = 600$ K, ***menținută***

constantă. Ştiind că prin membrana de paladiu poate difuza hidrogen, aflaţi presiunile finale din vase.

Rezolvare. La orificii *mari* (> drumul liber mediu al moleculelor) se stabileşte echilibru în vase prin egalarea *presiunilor*. În cazul orificiilor *foarte mici* (< drumul liber mediu al moleculelor) echilibrul gazelor de o parte şi de alta se stabileşte când *fluxurile* de molecule incidente pe orificiu într-o parte şi alta se egalează. Fluxul de molecule reprezintă numărul de molecule incidente în *unitatea de timp* pe o anumită suprafaţă.

Se demonstrează în teoria cinetică următoarea formulă pentru flux ("curent" de molecule) :

$$\Phi = (1/4)\, n\, \bar{v}\, S, \qquad \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \qquad (1)$$

unde n este concentraţia moleculelor (numărul moleculelor din unitatea de volum), iar $\bar{v}$ viteza ***medie*** a moleculelor (a nu se confunda cu viteza *pătratică* medie sau viteza *termică*) .

Pentru hidrogen avem atunci condiţia de echilibru :

$$(1/4)\, n_2'\, \bar{v}'_2 S = (1/4)\, n_2''\, \bar{v}''_2 S \text{ sau } n_2' \sqrt{T_1} = n_2'' \sqrt{T_2}, \quad (2)$$

dar $n = N/V = \nu N_A / V$, atunci (2) devine

$$\nu_2' \sqrt{T_1} = \nu_2'' \sqrt{T_2}, \quad \text{dar} \quad \nu_2' + \nu_2'' = \nu_2 = m_2/\mu_2, \qquad (3)$$

$$\nu_2' = \nu_2 \sqrt{T_2} : [\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}] = (m_2/\mu_2) \sqrt{T_2} : [\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}] =$$
$$= 0{,}60 \text{ mol}, \quad \nu_2'' = 0{,}40 \text{ mol}. \qquad (4)$$

Presiunile din vase se obţin uşor din *ecuaţia de stare* :

$$p_1' = (m_1/\mu_1 + \nu_2')RT_1 / V = 270 \text{ kPa},$$
$$p_2'' = \nu_2'' RT_2 / V = 200 \text{ kPa}. \qquad (5)$$

Observăm că din (2) şi din $p = nkT$ rezultă că presiunile parţiale ale hidrogenului de o parte şi de alta a membranei se egalează numai dacă temperaturile sunt egale, altfel avem

$$[p_2'/(kT_1)] \sqrt{T_1} = [p_2''/(kT_2)] \sqrt{T_2} \rightarrow p'/p'' = \sqrt{T_1/T_2}. \quad (6)$$

3.34. ***Într-un cilindru orizontal lung se află*** $\nu = 1{,}00$ mol ***de gaz ideal diatomic la temperatura*** $T_0 = 300$ K, ***închis între două pistoane de masă*** $m = 1{,}00$ kg ***fiecare, care se pot mişca etanş fără frecări. În exterior presiunea este* neglijabilă *şi sistemul este termoizolat. În momentul iniţial se imprimă pistoanelor vitezele*** $v_1 = 6{,}0$ m/s , $v_2 = 4{,}0$ m/s ***unul spre celălalt. Aflaţi temperatura maximă pe care o va atinge gazul .***

Rezolvare. Pierderea *maximă* de energie cinetică, care se transformă în energia internă a gazului, are loc în ciocirea *plastică* (total inelastică). Din teoria ciocnirilor avem :

$$-\Delta E_c = (1/2)\, m_r\, v_r^2 = (1/2)\,[m\, m\,/\,(m + m)][v_1 - (-\, v_2)]^2 =$$
$$= (1/4)\, m(v_1 + v_2)^2 = \Delta U = \nu C_V \Delta T\,, \qquad (1)$$
$$T_{max} = T_o + [m\,/\,(4\nu C_V)]\,(v_1 + v_2)^2 = 300\text{ K} + 1{,}2\text{ K}\,, \qquad (2)$$

unde $C_V = 5R/2$ pentru gaze *di*atomice. Creşterea de temperatură este modestă .

3.35. ***Un satelit cu aria secţiunii transversale*** **S = 1,00 m**^{2} ***se mişcă cu prima viteză cosmică pe o orbită circulară unde presiunea*** p = 137 μPa ***şi temperatura*** T = 1226 K (***altitudine*** h ≈ ≈ 200 km). ***Aflaţi numărul de ciocniri pe secundă între satelit şi moleculele de aer.***

Rezolvare. Numărul de ciocniri suferite de satelit, pe unitatea de timp, este egal cu numărul moleculelor interceptate de satelit în drumul său, în unitatea de timp, deci pe distanţa $v \cdot 1 = v$, deci cu numărul moleculelor cuprinse într-un cilindru de lungime v şi bază S :

$$z = v \cdot S \cdot n\,, \quad p = nkT\,, \qquad (1)$$

unde n este concentraţia moleculelor. Dar prima viteză cosmică este $v = \sqrt{gR_P}$, unde g este acceleraţia gravitaţională şi R_P - raza Pământului ,

$$z = \sqrt{gR_P}\;[p\,/\,(kT)]\; S \approx 6 \cdot 10^{19}\text{ s}^{-1}\,. \qquad (2)$$

* **3.36.** ***Calculaţi viteza cea mai probabilă (de maximă pobabilitate)*** v_p ***şi energia cinetică de translaţie cea mai probabilă (de maximă probabilitate)*** ε_p ***a moleculelor unui gaz perfect.***

Rezolvare. Viteza cea mai *probabilă* sau de maximă probabilitate corespunde maximului *funcţiei de distribuţie* f(v) care dă densitatea de probabilitate. Condiţia de maxim este anularea derivatei. Putem deriva mai simplu în raport cu v^2 :

$$\mathrm{d}f(v)\,/\,\mathrm{d}(v^2) = 4\pi[m_o\,/\,(2\pi kT)]^{3/2}\, e^{-m_o v^2/(2kT)}\,[1 - m_o v^2\,/\,(2kT)] = 0,$$

de unde
$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m_o}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \qquad (1)$$

Acestei viteze îi corespunde maximul funcţiei de distribuţie :

$$f_{max} = 4 : (e\sqrt{\pi} \cdot v_p) = 0{,}83\,/\,v_p\,. \qquad (2)$$

De aici se vede că punctele de maxim ("vârfurile") curbelor de distribuție pentru diferite temperaturi se situează pe o iperbolă echilateră :

$$f = 4 : (e\sqrt{\pi} \cdot v) = 0{,}83 / v\,, \qquad (3)$$

deci maximele f_{max}, adică vârfurile curbelor de distribuție, scad şi se depărtează spre viteze mai mari odată cu creşterea temperaturii.

Pentru a afla energia cinetică de translație $\varepsilon = m_o v^2/2$ cea mai probabilă sau de maximă probabilitate, trebuie să deducem funcția de distribuție sau densitatea de probabilitate *după energii cinetice* $f(\varepsilon)$. Plecăm de la probabilitatea ca molecula să aibă viteza în intervalul $(v, v + dv)$ sau energia cinetică în intervalul corespunzător $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$:

$$dP = f(v)dv = f(\varepsilon)d\varepsilon\,. \qquad (4)$$

dar
$$d\varepsilon = d(m_o v^2/2) = m_o v dv = \sqrt{2m_o\varepsilon} \cdot dv\,, \qquad (5)$$

deci
$$f(\varepsilon)d\varepsilon = f(v)dv = f(v) \cdot d\varepsilon : \sqrt{2m_o\varepsilon} =$$
$$= 4\pi\,(2\varepsilon/m_o)\,[m_o/(2\pi kT)]^{3/2}\, e^{-\varepsilon/(kT)} \cdot d\varepsilon : \sqrt{2m_o\varepsilon}\,,$$

de unde funcția de distribuție după energii cinetice :

$$f(\varepsilon) = (2/\sqrt{\pi}\,)[1/(kT)^{3/2}]\, e^{-\varepsilon/(kT)}\sqrt{\varepsilon}\,. \qquad (6)$$

Maximul se obține prin anularea derivatei :

$$f\,'(\varepsilon) = (2/\sqrt{\pi}\,)[1/(kT)^{3/2}]\, e^{-\varepsilon/(kT)}\,[\,-\sqrt{\varepsilon}/(kT) + 1/(2\sqrt{\varepsilon})] = 0\,,$$

de unde
$$\varepsilon_p = kT/2 \qquad (7)$$

şi îi corespunde
$$f_{max} = (1/\sqrt{2\pi e}\,)\,(1/\varepsilon_p) = 0{,}24/\varepsilon_p\,. \qquad (8)$$

Observăm că energia cinetică cea mai probabilă ε_p (7) ***nu*** corespunde vitezei celei mai probabile, adică

$$\varepsilon_p = kT/2 \neq m_o v_p^2/2 = kT\,. \qquad (9)$$

(* *) 3.37. ***La ce temperatură energia cinetică medie a atomilor de heliu este suficientă pentru a învinge atracția gravitațională terestră şi a părăsi atmosfera ?***

Rezolvare. Conform teoremei variației energiei cinetice, energia cinetică a moleculei va fi cheltuită pentru a efectua lucru mecanic împotriva forței de atracție gravitațională, adică pentru creşterea energiei potențiale :

$$dE_p = -\,dL = -\,\vec{F}\,d\vec{r} = -\,F\,dr = (\,\gamma m_o M/r^2)\,dr\,,$$

$$\Delta E_p = \int dE_p = -\int dL = -\,L = \int_{R_p}^{\infty} \gamma\, m_o M \frac{dr}{r^2} =$$

$$= -\gamma\, m_o M \frac{1}{r}\Big|_{R_P}^{\infty} = \gamma\, m_o M \frac{1}{R_P}, \qquad (1)$$

unde M este masa şi R_P - raza Pământului, m_o- masa moleculei (atomului de heliu). Dar accelerația gravitațională la nivelul mării :

$$g_o = \gamma\, M / R_P{}^2\ , \qquad (2)$$

atunci $$\Delta E_p = - L = m_o g_o R_P \qquad (3)$$

şi condiția cerută : $(1/2)\, m_o \overline{v^2} = (3/2)\, kT \geq \Delta E_p = m_o g_o R_P\ ,$ (4)

de unde $$T \geq 2\, m_o g_o R_P / (3k) = 2\, \mu g_o R_P / (3R) = 20 \text{ kK}\ , \qquad (5)$$

unde $\mu = m_o N_A$ este masa molară a heliului. Se vede că moleculele uşoare pot părăsi mai uşor atmosfera terestră.

De altfel se cunoaşte energia potențială de interacție gravitațională între două sfere omogene sau corpuri punctiforme:

$$E_p = -\gamma\, m_1 m_2 / r\,. \qquad (6)$$

Atunci din conservarea energiei cinetice şi potențiale, $E_c + E_p =$ = const , rezultă imediat :

$$\Delta E_c = 0 - \bar{\varepsilon} = - \Delta E_p = - [0 - (-\gamma m_o M / R_P)]\ ,$$

$$\bar{\varepsilon} = 3kT / 2 = \gamma m_o M / R_P = m_o g_o R_P\ .$$

* * **3.38.** ***Calculați procentul de molecule din atmosferă care au o energie potențială gravitațională mai mare decât energia lor cinetică medie de translație , considerând că temperatura şi accelerația gravitațională sunt constante.***

Rezolvare. Concentrația moleculelor în funcție de altitudine este dată de formula : $$n(z) = n_o\, e^{-\mu g z/(RT)}\ . \qquad (1)$$

Energia cinetică medie de translație a moleculelor :

$$(1/2)\, m_o \overline{v^2} = (3/2)\, kT\,. \qquad (2)$$

Condiția cerută : $$m_o g h \ \geq\ (1/2)\, m_o \overline{v^2} = (3/2)\, kT\ , \qquad (3)$$

$$h_{min} = 3kT / (2m_o g) = 3RT / (2\mu g)\,. \qquad (4)$$

Să calculăm acum raportul (procentajul) cerut. Luăm o coloană verticală (infinită) de secțiune oarecare S. Moleculele care verifică condiția cerută (4) sunt situate la $z \geq h_{min}$. Alegem *elementul* de volum dV sub forma unei pături orizontale *infinit de subțiri*, situate la înălțimea z , deci de grosime dz şi volum d$V = S$ dz . În acest element de volum sunt d$N = n(z)$ dV molecule, unde $n(z)$ este dat de (1). Prin urmare, raportul cerut este

$$f=\int_{h_{min}}^{\infty} n(z)\mathrm{d}V : \int_0^{\infty} n(z)\mathrm{d}V = \int_{h_{min}}^{\infty} n_0 e^{-\mu gz/(RT)} S\mathrm{d}z : \int_0^{\infty} n_0 e^{-\mu gz/(RT)} S\mathrm{d}z =$$

$$= e^{-\mu gz/(RT)}\Big|_{h_{min}}^{\infty} : e^{-\mu gz/(RT)}\Big|_0^{\infty} = e^{-\mu g h_{min}/(RT)} = e^{-3/2} = 22{,}3\ \% . \quad (5)$$

*** * 3.39.** ***Calculați viteza medie a moleculelor şi viteza pătratică medie cu ajutorul distribuției maxwelliene .***

Rezolvare. Dacă viteza ar lua valori *discrete* $v_1, v_2, \ldots$, atunci viteza medie ar fi evident:

$$\bar{v} = (\Sigma v_i n_i) : n = \Sigma v_i P_i , \quad (n_i / n = P_i) , \quad (1)$$

unde n_i este numărul moleculelor care au viteza v_i, iar n este numărul total de molecule, $n_i / n = P_i$ este evident *probabilitatea* ca o moleculă să aibă viteza v_i. Dacă viteza ia valori în mod *continuu* în intervalul $(0, \infty)$ (aşa cum este practic cazul într-un gaz, datorită numărului imens de molecule) , suma din (1) trece într-o integrală :

$$\bar{v} = \int \frac{v\mathrm{d}n}{n} = \int v\mathrm{d}P = \int_0^{\infty} v\, f(v)\mathrm{d}v \quad , \quad (2)$$

unde $f(v)$ este funcția de distribuție sau densitatea de probabilitate ,

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v\cdot 4\pi v^2 \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m_0 v^2/(2kT)}\, \mathrm{d}v . \quad (3)$$

Să calculăm integrala $(\alpha > 0)$:

$$I_1 = \int_0^{\infty} x\, e^{-\alpha x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\frac{e^{-\alpha x^2}}{-\alpha}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha} . \quad (4)$$

Prin derivarea integralei (4) în raport cu parametrul α (v. condițiile care trebuie îndeplinite pentru o asemenea derivare) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^{\infty} x\, e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} - x^3\, e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{1}{2\alpha}\right) = -\frac{1}{2\alpha^2} ,$$

de unde

$$I_3 = \int_0^{\infty} x^3\, e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha^2} . \quad (5)$$

De altfel, integrala (5) se poate calcula şi direct, prin părți :

$$I_3 = \int_0^{\infty} x^3\, e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2\alpha}\int_0^{\infty} x^2 \mathrm{d}e^{-\alpha x^2} = -\frac{1}{2\alpha} x^2\, e^{-\alpha x^2}\Big|_0^{\infty} +$$

$$+ \frac{1}{2\alpha}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty} x\, e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} I_1 = \frac{1}{2\alpha^2} ,$$

unde ultima integrală I_1 am calculat-o mai înainte în (4).

Revenind la integrala noastră (3) avem

$$\bar{v}= 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}\frac{1}{2m_0^2/(2kT)^2}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} . \quad (6)$$

Să calculăm acum $\overline{v^2}$. Aplicând acelaşi raţionament ca pentru $\bar{v}$, avem :

$$\overline{v^2}=\int_0^{\infty}v^2f(v)\mathrm{d}v=\int_0^{\infty}v^2\cdot 4\pi v^2\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-m_0v^2/(2kT)}\mathrm{d}v . \quad (7)$$

Vom pleca de la *integrala lui **Poisson*** ($\alpha > 0$) :

$$I_0=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} , \quad (8)$$

pe care o derivăm succesiv de două ori în raport cu parametrul α:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}I_0=\int_{-\infty}^{\infty}-x^2\,e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}=\sqrt{\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\alpha^{-3/2}=-\frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} ,$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} , \quad (9)$$

$$I_4=\int_{-\infty}^{\infty}x^4\,e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\alpha^{-5/2}=\frac{3}{4\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} . \quad (10)$$

De altfel, aceste integrale se pot obţine integrând prin părţi şi folosind integrala lui **Poisson** I_0 (8) , şi anume :

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}x\,\mathrm{d}e^{-\alpha x^2}=-\frac{1}{2\alpha}xe^{-\alpha x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\alpha}I_0=\frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} ,$$

$$I_4=\int_{-\infty}^{\infty}x^4\,e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}x^3\,\mathrm{d}e^{-\alpha x^2}=-\frac{1}{2\alpha}x^3\,e^{-\alpha x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}3x^2\,e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{3}{2\alpha}I_2=\frac{3}{4\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} .$$

De altfel, se pot obţine uşor formule generale pentru I_{2n+1} şi I_{2n} (aşa numitele *integrale ale lui **Poisson***):

$$I_{2n+1}=\int_0^{\infty}x^{2n+1}\,e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{n\,!}{2\alpha^{n+1}} , \quad (11)$$

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\, e^{-\alpha x^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{(2\alpha)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ , \qquad (12)$$

unde *dublul factorial* înseamnă :

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1)\,. \qquad (13)$$

Revenind la integrala noastră (7) şi observând că limitele de integrare sunt de la 0 la ∞, deci integrala valorează exact jumătate din (10) :

$$\overline{v^2} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4m_0^2/(2kT)^2}\sqrt{\frac{\pi}{m_0/(2kT)}} = \frac{3kT}{m_0}\ ,$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}\ , \qquad (14)$$

am regăsit rezultatul cunoscut.

Ţinând seama de *simetria **sferică*** avem imediat :

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\,\overline{v_x^2} = 3\,\overline{v_y^2} = 3\,\overline{v_z^2}\ ,$$

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\,\overline{v^2}\ . \qquad (15)$$

Propunem cititorului ca, folosind integralele lui **Poisson** (11), (12), să stabilească următoarele medii :

$$\overline{v^{2n+1}} = \frac{2(n+1)!}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2kT}{m_0}\right)^{n+1/2} \qquad (16)$$

$$\overline{v^{2n}} = (2n+1)!!\left(\frac{kT}{m_0}\right)^n . \qquad (17)$$

* * **3.40.** ***Ştiind că numărul de molecule care lovesc unitatea de arie în unitatea de timp şi au modulul vitezei în intervalul*** (v, v + dv) ***este dat de formula*** (18) ***de la*** **Breviar** ***:*** $dN_0(v) = (1/4)\, n f(v) v\, dv$, ***calculaţi energia cinetică de translaţie*** E_0 ***a moleculelor unui gaz perfect, care lovesc unitatea de arie a peretelui în unitatea de timp.***

Rezolvare. Fiecare din cele $dN_0(v)$ molecule duce cu sine o energie cinetică $m_0 v^2/2$, deci energia cinetică totală a acestor molecule este

$$dE_0(v) = dN_0(v) \cdot m_0 v^2/2 = (1/8)\, n\, m_0 v^3 f(v) dv\,. \qquad (1)$$

Însumând (integrând) după viteze :

$$E_0=\int dE_0(v)=\frac{1}{8}nm_0\int_0^{\infty}v^3f(v)\,dv=\frac{1}{8}nm_0\overline{v^3}=\frac{1}{8}\rho\,\overline{v^3}\ ,$$

unde $nm_0=\rho$ este densitatea. Propunem cititorului să calculeze singur $\overline{v^3}$; noi vom lua rezultatul de la problema precedentă 3.39:

$$\overline{v^3}=8\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{kT}{m_0}\right)^{3/2}, \qquad (3)$$

astfel încât (2) devine :

$$E_0=\frac{1}{8}nm_0\overline{v^3}=nkT\sqrt{\frac{2kT}{\pi m_0}}=\frac{1}{2}p\overline{v}\ . \qquad (4)$$

* * **3.41.** ***Într-un vas de volum*** V = 1,00 L , ***complet vidat, se deschide un*** **mic** ***orificiu de secțiune*** S = 1,0 · 10^{-2} mm^2 ***într-un perete*** **subțire.** ***Aflați cum variază în timp presiunea*** p ***din vas și după cât timp*** τ ***presiunea aerului din vas devine egală cu o fracțiune*** q = 0,50 ***din presiunea atmosferică. Deși procesul nu este*** **cvasistatic,** ***presupuneți totuși că se desfășoară suficient de*** **lent,** ***astfel încât se poate vorbi de presiunea și temperatura aerului din vas. Considerați temperatura aerului din vas egală cu temperatura exterioară*** T = 300 K. ***Numărul de molecule care lovesc unitatea de arie în unitatea de timp este*** N_0= (1/4)n $\overline{v}$.

Rezolvare. Numărul moleculelor de aer care intră în vas prin orificiul *S* , la un moment dat *t*, în intervalul de timp d*t*, este

$$\frac{1}{4}n_e\overline{v}Sdt=\frac{1}{4}\frac{H}{kT}\overline{v}Sdt\ ,\quad (H\text{ - presiunea atmosferică}). \qquad (1)$$

În același moment *t* și în același interval de timp d*t* iese afară din vas numărul de molecule :

$$\frac{1}{4}n_i\overline{v}Sdt=\frac{1}{4}\frac{p}{kT}\overline{v}Sdt\ ,\quad (p\text{ - presiunea din vas})\ . \qquad (2)$$

Creșterea numărului de molecule din vas va fi diferența :

$$dN=\frac{1}{4}\frac{H-p}{kT}\overline{v}Sdt\ . \qquad (3)$$

Dar $\quad pV=NkT\ ,\quad dp=d(NkT/V)=(kT/V)\,dN\ , \qquad (4)$

$$dp=\frac{(H-p)}{4V}\overline{v}S\,dt\ . \qquad (5)$$

Separăm variabilele și integrăm :

$$\frac{dp}{H-p} = \frac{S}{4V}\bar{v}\,dt \ , \qquad \int \frac{dp}{H-p} = -\ln(H-p) =$$

$$= \int \frac{S}{4V}\bar{v}\,dt = \frac{S}{4V}\bar{v}\,t + C \ ,$$

unde constanta de integrare C se determină din *condiția* ***inițială*** : la $t = 0$ avem $p = 0$, deci $-\ln H = C$,

$$-\ln\frac{H-p}{H} = \frac{S}{4V}\bar{v}\,t \ , \quad p = H\left(1 - e^{-S\bar{v}\,t/(4V)}\right) \ . \tag{6}$$

Se poate integra și *definit* (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^p \frac{dp}{H-p} = -\ln\frac{H-p}{H} = \int_0^t \frac{S}{4V}\bar{v}\,dt = \frac{S}{4V}\bar{v}\,t \ .$$

Punem condiția ca presiunea să fie $p = qH$ și găsim timpul corespunzător :

$$-\ln\frac{H-qH}{H} = \ln\frac{1}{1-q} = \frac{S}{4V}\bar{v}\,\tau \ ,$$

$$\tau = \frac{4V}{S\bar{v}}\ln\frac{1}{1-q} = 14 \text{ min.} \tag{7}$$

* * *

4.FENOMENE SUPERFICIALE LA LICHIDE

4.1. Tensiunea superficială

4.1.1. ***Un chibrit cu lungimea*** ℓ = 4,0 cm ***pluteşte pe suprafaţa apei*** (t = 20°C) . ***Dacă de o parte a chibritului picurăm o soluţie de săpun, chibritul se pune în mişcare. Încontro şi sub acţiunea cărei forţe ?*** ($\sigma_{apă}$ = 73 mN/m , $\sigma_{săp.}$ = 43 mN/m).

Rezolvare. De o parte şi de alta chibritul este în contact cu pelicula superficială de lichid care are tendinţa de a-şi restrânge aria, deci va fi supus la o forţă de ordinul $\sim \sigma\,\ell$. Rezultanta va fi spre apa pură : $F \sim (\sigma_{apă} - \sigma_{săp.})\,\ell = 1{,}2$ mN .

4.1.2. ***Un ac de oţel uns cu grăsime (apa nu-l udă deloc) se aşează pe suprafaţa apei. Pentru ce diametre acul se men-ţine pe suprafaţa apei ?***

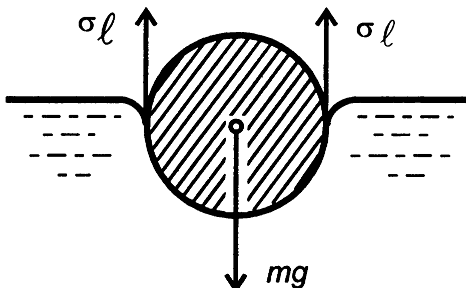


Fig.4.1.2

Rezolvare. Neglijând forţa arhimedică faţă de forţele de tensiune superficială, scriem condiţia de plutire :

$$mg \sim 2\,\sigma\,\ell \quad \text{sau} \quad \rho\,(\pi D^2/4)\cdot \ell\, g = 2\,\sigma\,\ell\,, \tag{1}$$

$$D = \sqrt{\frac{8\sigma}{\pi\rho g}} = 1{,}6 \text{ mm}\,. \tag{2}$$

4.1.3. ***Evaluaţi cu câte grade se încălzeşte o picătură de mercur, obţinută prin fuziunea a*** N = 1000 ***picături de rază*** r = =1,00 mm ***fiecare. Dar dacă numărul picăturilor tinde la infinit?***

Rezolvare. Ţinând seama că volumul picăturii rezultate este egal cu de *N* ori volumul unei picături componente, putem afla raza picăturii rezultate : $4\pi R^3/3 = N \cdot 4\pi r^3/3 \rightarrow R = r\sqrt[3]{N}$. (1)

Vom ţine seama de diferenţa de energie superficială care trece în energia internă sub "formă de căldură", deci la creşterea temperaturii :

$$\Delta E = N \cdot 4\pi r^2 \cdot \sigma - 4\pi R^2 \cdot \sigma = mc\Delta t, \quad (2)$$

$$4\pi\sigma\left(Nr^2 - r^2\sqrt[3]{N^2}\right) = \rho \cdot (4\pi R^3/3) \cdot c\Delta t = \rho \cdot N(4\pi r^3/3) \cdot c\Delta t, \quad (3)$$

$$\Delta t = 3\sigma(N - \sqrt[3]{N^2}) : (Nr\rho c) = 7{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{K (neglijabil)}; \quad (4)$$

$$\Delta t = [3\sigma / (r\rho c)]\,(1 - 1 : \sqrt[3]{N}) \underset{N \to \infty}{\rightarrow} 3\sigma / (r\rho c) = 8{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{K}. \quad (5)$$

4.1.4. ***Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a diviza o picătură sferică de mercur de rază*** R = 3,0 mm ***în*** N = 8 ***picături identice?***

Rezolvare. Lucrul mecanic (*izoterm*) este egal cu diferenţa de energie superficială a picăturilor :

$$L = N \cdot 4\pi r^2 \cdot \sigma - 4\pi R^2 \cdot \sigma, \quad (1)$$

dar din egalitatea volumelor avem :

$$(4\pi/3)R^3 = N \cdot (4\pi/3)\, r^3 \rightarrow r = R : \sqrt[3]{N}, \quad (2)$$

$$L = 4\pi\sigma(NR^2 / \sqrt[3]{N^2} - R^2) = 4\pi R^2\sigma(\sqrt[3]{N} - 1) = 56{,}5\ \mu\text{J}. \quad (3)$$

4.1.5. ***Ce lucru mecanic trebuie efectuat (izoterm) împotriva forţelor de tensiune superficială pentru a mări de*** N = 8,0 ori ***volumul unei bule de săpun de rază*** R = 10 mm ***?***

Rezolvare. Lucrul mecanic este necesar pentru a mări energia superficială a bulei de săpun. Observăm că pelicula de săpun este mărginită de o parte şi de alta (dinspre interior şi dinspre exterior) de stratul superficial al soluţiei de apă şi săpun, deci trebuie mărită aria *ambelor* pături superficiale :

$$L = 2 \cdot \sigma\,[4\pi R'^2 - 4\pi R^2], \quad (1)$$

dar $(4\pi/3)R'^3 = N \cdot (4\pi/3)R^3 \rightarrow R' = R\sqrt[3]{N}$, (2)

$$L = 2\,\sigma \cdot 4\pi R^2\,(\sqrt[3]{N^2} - 1) = 0{,}32\ \text{mJ}.$$

4.1.6. ***Ce forţă trebuie aplicată unui inel cilindric orizontal, de înălţime*** h = 10 mm, ***de diametru interior*** D_1 = 50 mm ***şi exte-***

rior $D_2 = 52$ mm , ***care pluteşte pe apă, pentru a-l desprinde de suprafaţa apei ?***

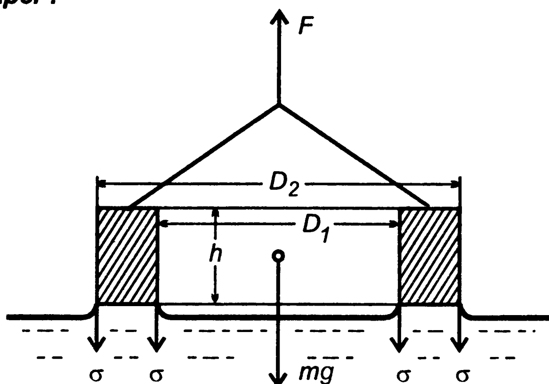


Fig.4.1.6

Rezolvare. Forţa *F* trebuie să învingă atât greutatea inelului, cât şi forţele de tensiune superficială, ca în figură. Ţinem seama de cele *două* contururi (cel interior şi cel exterior) ale peliculei superficiale de lichid, deci $F = mg + \sigma \cdot \pi D_1 + \sigma \cdot \pi D_2 =$

$$= \rho\, h\, (\pi/4)\, (D_2^2 - D_1^2)\, g + \sigma\, \pi\, (D_1 + D_2) = 40{,}0 \text{ mN} + 23{,}5 \text{ mN}.$$

4.1.7. ***Un inel, cu diametrul interior*** $D_1 = 25$ mm ***şi exterior*** $D_2 = 26$ mm, ***este suspendat de un resort cu constanta elastică*** $k = 1{,}00$ N/m ***şi se atinge de suprafaţa unui lichid. Coborând vasul cu lichid, inelul se desprinde când resortul s-a lungit cu*** $x = 5{,}3$ mm. ***Aflaţi coeficientul de tensiune superficială al lichidului .***

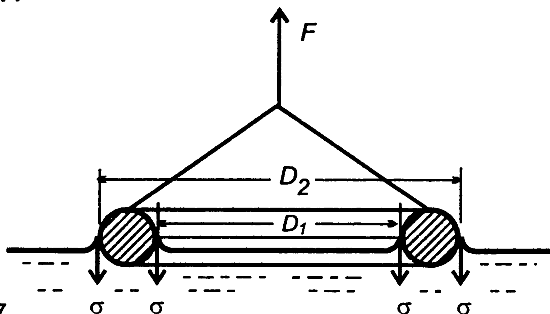


Fig.4.1.7

Rezolvare. Greutatea inelului este echilibrată prin forţa elastică dată de deformarea (alungirea) *iniţială* a resortului de care

este suspendat inelul. Prin urmare, forța elastică datorită alungirii *suplimentare* x trebuie să învingă forțele de tensiune superficială. Să nu uităm că sunt ***două*** contururi circulare, cel interior şi cel exterior, prin care inelul este în contact cu lichidul, deci :

$$k\,x = \sigma\,\pi D_1 + \sigma\,\pi D_2\,,\quad \sigma = k\,x : [\pi(D_1 + D_2)] = 33\ \text{mN/m}\,.$$

4.1.8. ***Cadrul din figură este acoperit de o peliculă din apă cu săpun*** (σ = 45 mN/m) ***şi ținut vertical.*** **a)** ***Ce diametru trebuie să aibă tija mobilă*** CD ***din cupru pentru a sta în echilibru ?***

b) ***Ce lungime are tija dacă pentru a o deplasa cu*** d = 10 mm ***trebuie efectuat un lucru mecanic*** L = 45 μJ ***?***

Rezolvare. a) Pelicula de lichid ABDC este mărginită de *ambele* părți (fețe) de stratul superficial care aderă de tija CD, deci rezultanta forțelor de tensiune superficială este $\mathbf{2}\cdot\sigma\,\ell$ care trebuie să echilibreze greutatea mg a tijei. Prin urmare,

$$2\,\sigma\,\ell = mg = \rho\,(\pi D^2/4)\,\ell\,g\,, \quad (1)$$

$$D = 2\,\sqrt{2\sigma/(\pi\rho g)} = 1{,}2\ \text{mm}\,. \quad (2)$$

b) Lucrul mecanic se face împotriva forțelor de tensiune superficială : $L = 2\,\sigma\,\ell\cdot d$, $\ell = L : (2\,\sigma\,d) = 5{,}0$ cm . (3)

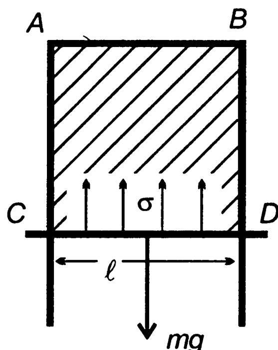


Fig.4.1.8

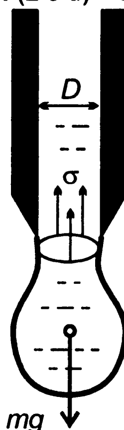


Fig.4.1.9

4.1.9. ***Dintr-un tub capilar de diametru interior*** D = 2,0 mm ***cad picături de alcool. Ştiind masa unei picături*** m = 14,3 mg , ***aflați coeficientul de tensiune superficială al alcoolului. Dacă prin acelaşi capilar picură*** N_a = 40 ***picături de apă, ele cântăresc în total*** m_a = 1,90 g. ***Aflați coeficientul de tensiune superficială al apei.***

Rezolvare. În momentul desprinderii picăturii, greutatea acesteia mg învinge rezultanta forțelor de tensiune superficială :

$$\sigma \cdot 2\pi r = \sigma \pi D = mg \rightarrow \sigma = mg/(\pi D) = 22{,}3 \text{ mN/m} . \quad (1)$$

Analog pentru apă : $\sigma_a = (m_a / N_a)g : (\pi D) = 74$ mN/m . (2)

4.1.10. ***Prin topirea capătului inferior al unei sârme (verticale) de plumb, de diametru*** D = 1,0 mm , ***s-au format*** N = 20 ***picături de plumb şi sârma s-a scurtat cu*** ℓ = 34 cm. ***Aflați coeficientul de tensiune superficială al plumbului.***

Rezolvare. Analog raționamentului de la problema precedentă 4.1.9, greutatea unei picături în momentul desprinderii învinge rezultanta forțelor de tensiune superficială :

$$mg = \sigma \pi D, \quad \text{dar} \quad \rho \ell \pi D^2/4 = N m , \quad (1)$$

$$\sigma = mg/(\pi D) = \rho \ell \pi D^2 g : (4\pi D N) = \rho \ell D g : (4N) = 0{,}47 \text{ N/m}. \quad (2)$$

4.1.11. ***Dintr-un tub vertical de rază interioară*** r=1,0 mm ***picură apă. Considerând picăturile sferice şi cunoscând coeficientul de tensiune superficială al apei, aflați raza unei picături .***

Rezolvare. Ca în problema 4.1.9, în momentul desprinderii picăturii greutatea sa învinge rezultanta forțelor de tensiune superficială :

$$mg = \sigma \cdot 2\pi r , \quad \rho(4\pi/3)R^3 g = \sigma \cdot 2\pi r , \quad (1)$$

$$R = \sqrt[3]{3\sigma r/(2\rho g)} = 2{,}2 \text{ mm} . \quad (2)$$

4.1.12. ***Cât cântăreşte o picătură de apă , la*** 20°C, ***dacă ea picură dintr-un capilar de diametru*** d = 1,20 mm ?

Rezolvare. Conform problemei precedente 4.1.11, în momentul desprinderii : $mg = \sigma \cdot \pi d \rightarrow m = \pi\sigma d/g = 28$ mg .

4.1.13. ***Apa picură printr-un tub de diametru interior*** D = = 3,0 mm. ***Când temperatura apei a scăzut de la*** t_1 ~ 100°C ***la*** t_2 = 20°C ***masa fiecărei picături a scăzut cu*** Δm = 13,5 mg. ***Cunoscând tensiunea superficială a apei la temperatura*** t_2, ***aflați*** σ ***la temperatura*** t_1.

Rezolvare. Conform problemei precedente 4.1.12,

$$m_1 g = \sigma_1 \pi D , \quad m_2 g = \sigma_2 \pi D . \quad (1)$$

Scăzând ecuațiile membru cu membru, obținem:

$$(m_2 - m_1)g = \Delta m\, g = (\sigma_2 - \sigma_1)\pi D ,$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 - \Delta m\, g/(\pi D) = 73 \text{ mN/m} - 14 \text{ mN/m} = 59 \text{ mN/m} . \quad (2)$$

4.1.14. ***Printr-un tub capilar picură mase egale de apă şi alcool (la*** 20°C***). Aflați raportul numerelor de picături.***

Rezolvare. Conform problemelor precedente :

$(M / N_{ap\bullet}) \cdot g = \sigma_{ap\bullet}\, \pi D$, $\quad (M / N_{alc.}) \cdot g = \sigma_{alc.}\, \pi D$, (1)

$N_{alc.} / N_{ap\bullet} = \sigma_{ap\bullet} / \sigma_{alc.} = 3{,}3$. (2)

4.1.15. ***Printr-un tub capilar s-au picurat mase egale de apă, întâi la temperatura*** $t_1 = 8{,}0^oC$ ***obținându-se*** $N_1 = 40$ ***picături, apoi la*** $t_2 = 80^oC$, ***obținându-se*** $N_2 = 48$ ***picături. Considerând densitatea apei practic constantă, aflați raportul coeficienților de tensiune superficială .***

Rezolvare. Ca în problemele precedente, greutatea unei picături în momentul desprinderii echilibrează rezultanta forțelor de tensiune superficială care acționează pe conturul circular de desprindere: $Mg / N_1 = \sigma_1\, \pi d$, $Mg / N_2 = \sigma_2\, \pi d \rightarrow \sigma_1 / \sigma_2 = N_2 / N_1 = 1{,}2$.

4.1.16. ***Printr-un tub capilar s-au picurat*** $N_1 = 22$ ***picături de apă la temperatura*** $t = 20^oC$, ***iar apoi un volum egal , dar de*** $N_2 = 60$ ***picături de alcool. Cunoscând tensiunea superficială a apei și densitățile lichidelor, aflați tensiunea superficială a alcoolului (metoda* stalagmometrică*).***

Rezolvare. Avem, pe de o parte, condiția de desprindere a unei picături : $m_1 g = \sigma_1\, \pi d$, $\quad m_2 g = \sigma_2\, \pi d$, (1)

iar pe de altă parte, $V = N_1 \cdot m_1 / \rho_1 = N_2 \cdot m_2 / \rho_2$, (2)

$$\sigma_2 / \sigma_1 = m_2 / m_1 = (\rho_2 / \rho_1)\, N_1 / N_2,$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 (\rho_2 / \rho_1)\, N_1 / N_2 = 21 \text{ mN/m} . \quad (3)$$

4.1.17. ***Aflați densitatea aerului într-o bulă de aer de diametru*** $D = 15$ mm, ***aflată la adâncimea*** $h = 4{,}9$ m ***în apă. Temperatura este*** $t = 20^oC$ ***și presiunea atmosferică este cea normală. De câte ori această densitate este mai mare decât densitatea aerului exterior ?***

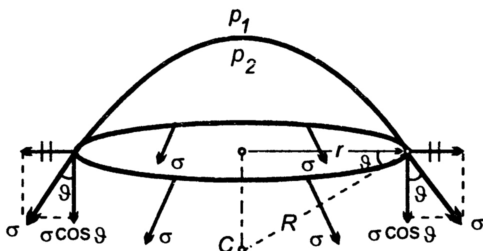


Fig.4.1.17

Rezolvare. Presiunea de o parte și de alta a unui menisc de lichid este *diferită* din cauza forțelor de tensiune superficială care acționează de-a lungul conturului meniscului și care dau o presiune

suplimentară Δp sub menisc (de partea *concavă*). Calculele arată că acest ***salt** de presiune* pentru menisc *sferic* (calotă sferică) este

$\Delta p = 2\sigma / R$ (formula lui ***Laplace*** pentru menisc sferic). (1)

Această formulă se poate demonstra în mai multe feluri, de exemplu luând un menisc sub formă de calotă sferică, ca în figură. Forțele de tensiune superficială sunt *tangente la menisc* (calotă) şi *perpendiculare pe conturul* acestuia. Componentele transversale pe axa meniscului se anulează reciproc, două câte două diametral opuse, iar cele longitudinale dau rezultanta : $\sigma \cos \vartheta \cdot 2\pi r$, care împărțită la aria secțiunii πr^2 dă suplimentul de presiune :

$\Delta p = p_2 - p_1 = \sigma \cos \vartheta \cdot 2\pi r : (\pi r^2) = (2\sigma \cos \vartheta) / r = 2\sigma / R$, (2)

unde R este raza sferei, adică *raza de curbură* a meniscului (calotei), iar r - raza conturului circular al bazei meniscului (calotei). Rețineți această formulă pentru problemele care urmează. Se poate da şi o altă demonstrație a acestei formule pe baza formulei lui *Jurin* pentru ascensiuni capilare.

Observăm că presiunea este mai **mare** de partea **concavă** a meniscului (calotei) şi mai mică de partea convexă.

Evident, pentru menisc plan : $\Delta p = 0$, $(R \to \infty)$.

Presiunea imediat în exteriorul bulei este egală cu presiunea atmosferică H la care se adaugă presiunea hidrostatică a păturii de apă $\rho g h$. Presiunea aerului din interiorul bulei trebuie să depăşească presiunea exterioară $H + \rho g h$ cu *saltul de presiune* (2) din cauza forțelor de tensiune superficială date de pelicula (stratul) superficială de apă care delimitează bula de aer, deci ($D/2$ - raza de curbură a meniscului):

$p = H + \rho g h + \Delta p = H + \rho g h + 4\sigma / D = 168{,}8$ kPa. (1)

Densitatea aerului : $\rho = \mu p / (RT) = 2{,}0$ kg/m^3, (2)

$\rho / \rho_0 = p / p_0 = 1{,}67$. (3)

4.1.18. ***Presiunea aerului din interiorul unei bule de săpun este cu*** $\Delta p = 1{,}00$ torr ***mai mare decât cea atmosferică. Care este diametrul bulei ?***

Rezolvare. Aerul din interiorul bulei de săpun este separat de aerul atmosferic exterior printr-o pătură din soluția de apă şi săpun, mărginită de ***două*** straturi superficiale de lichid, una din interior şi una din exterior. Prin urmare, presiunea aerului din interior este , conform problemei precedente 4.1.17 :

$p = 2\sigma / R_1 + 2\sigma / R_2 + H$, (1)

dar $R_1 \approx R_2 = R = D/2$, atunci

$\Delta p = p - H = 4\sigma / R = 8\sigma / D , \quad D = 8\sigma / \Delta p = 2{,}6 \text{ mm} .$ (2)

4.1.19. ***Ce forță (suplimentară) trebuie aplicată pentru a dezlipi (*nu *prin alunecare) două plăci paralele de sticlă ude, de dimensiuni*** $a \times b = 9 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$. ***Grosimea peliculei de apă dintre plăci este*** $d = 50\ \mu\text{m}$.

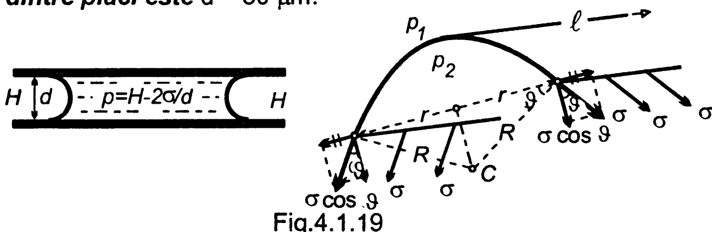


Fig.4.1.19

Rezolvare. Deoarece grosimea peliculei $d = 0{,}050$ mm « *a, b* ~ 100 mm, meniscul are forma unui *jgheab* aproape rectiliniu, ca în figură. Forțele de tensiune superficială se descompun, componentele normale la planul de simetrie se distrug reciproc două câte două, diametral opuse, iar cele în planul de simetrie dau rezultanta $\sigma \cos \vartheta \cdot 2\ell$, care împărțită la aria transversală longitudinală a jgheabului $2\, r\, \ell$ ne dă surplusul de presiune de sub menisc :

$$\Delta p = \sigma \cos \vartheta \cdot 2\ell : (2\, r\, \ell) = \sigma \cos \vartheta : r = 2\sigma \cos \vartheta : d = \sigma / R \quad (1)$$

(formula lui ***Laplace*** pentru menisc cilindric) ,

unde R este raza cilindrului, iar $2r = d$ este lățimea meniscului cilindric. Rețineți această formulă pentru problemele care urmează.

Presiunea în lichid va fi deci mai mică decât în exterior în situația din figură :

$$p = H - 2\,\sigma / d \ , \quad \Delta p = H - p = 2\,\sigma / d \ , \quad (2)$$

unde raza de curbură a meniscului cilindric este $d/2$ dacă apa udă *perfect* sticla ($\vartheta = 0$), de aceea pentru a separa plăcile trebuie o forță suplimentară (pe lângă greutatea plăcii superioare):

$$F = \Delta p \cdot S = (2\,\sigma / d)\, a \cdot b = 31{,}5 \text{ N} . \quad (3)$$

4.1.20. ***Între două plăci plan-paralele orizontale se află*** $m = 5{,}0$ g ***de mercur. Punând pe placa superioară un corp de masă*** $M = 5{,}0$ kg ***distanța dintre plăci devine*** $d = 87\ \mu\text{m}$. ***Neglijând greutatea plăcii superioare, aflați coeficientul de tensiune superficială al mercurului.***

Rezolvare. Analog problemei precedente 4.1.19, ținând seama că mercurul (spre deosebire de apă) practic *nu udă* deloc sticla ($\vartheta \approx 180^{o}$), avem presiunea în mercur ($d/2$ - raza de curbură a meniscului cilindric) : $\quad p = H + 2\,\sigma / d .$ (1)

Pe de altă parte, această presiune trebuie să echilibreze presiunea exercitată de placă Mg / S plus presiunea atmosferică :

$$p = H + 2\sigma / d = Mg / S + H, \quad \Delta p = 2\sigma / d = Mg / S, \qquad (2)$$

dar masa mercurului $m = \rho S d$:

$$\sigma = Mgd / (2S) = Mg \rho d^2 / (2m) = 0{,}50 \text{ N/m}. \qquad (3)$$

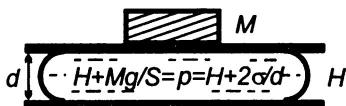


Fig.4.1.20

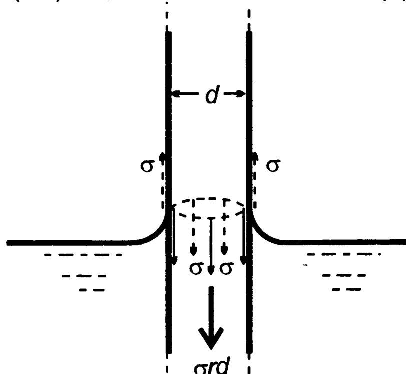


Fig.4.1.22

4.1.21. ***Între două plăci de sticlă orizontale se află mercur de forma unui disc de rază*** r = 2,28 cm ***şi grosime*** d = 0,38 cm. ***Ce greutate trebuie aşezată pe placa superioară pentru ca distanţa dintre plăci să se micşoreze de*** N = 10 ori ***? Unghiul de racordare (umectaţie) al mercurului cu sticla :*** $\vartheta = 138^o$.

Rezolvare. Aplicăm rezultatele de la problema 4.1.19, ţinând seama de unghiul de racordare (umectaţie) ϑ . Presiunea suplimentară exercitată de corpul aşezat , $mg / (\pi r^2)$, este echilibrată de creşterea suplimentară a presiunii din mercur. Prin micşorarea grosimii stratului de mercur de N ori, creşte aria de N ori (acelaşi volum de mercur), deci

$$mg / (N\pi r^2) = [H - 2\sigma\cos\vartheta : (d / N)] - [H - 2\sigma\cos\vartheta : d] =$$
$$= -(N - 1)\, 2\sigma\cos\vartheta : d, \qquad (1)$$

$$m = N(N - 1)\, \pi r^2\, 2\sigma(-\cos\vartheta) : (gd) = 2{,}9 \text{ kg}. \qquad (2)$$

4.1.22. ***Un areometru (densimetru) cu partea cilindrică verticală de diametru*** d = 9,0 mm ***pluteşte pe apă. Cu cât se schimbă adâncimea de scufundare a areometrului, dacă pe suprafaţa apei picurăm puţin alcool ?***

Rezolvare. Forţele de tensiune superficială acţionează pe circumferinţa părţii cilindrice verticale a areometrului, după care se racordează pelicula de lichid. Considerând că apa şi alcoolul udă

perfect sticla, unghiul de racordare (umectație) $\vartheta = 0$ și forțele de tensiune superficială sunt verticale. Deoarece σ_2 (alcool) < σ_1 (apă), rezultanta forțelor de tensiune superficială $\sigma \pi d$ se va micşora şi deci areometrul va urca, fiind necesară o forță arhimedică mai mică :

$$(\sigma_2 - \sigma_1)\,\pi d = \Delta h\,(\pi d^2/4)\,\rho\, g\,, \qquad (1)$$

$$\Delta h = 4(\sigma_2 - \sigma_1) : (\rho\, g d) = -\,2{,}4 \text{ mm (se ridică)}\,. \qquad (2)$$

4.1.23. ***Un areometru, având partea cilindrică verticală de diamteru*** D = 9,0 mm, ***plutește într-un lichid de densitate*** $\rho = 800$ kg/m^3 ***care udă complet sticla*** (σ = 30 mN/m). ***Cu cât se schimbă adâncimea de scufundare dacă prin murdărirea cu grăsime a tubului lichidul nu mai udă deloc sticla ?***

Rezolvare. Conform problemei precedente 4.1.22 :

$$\Delta h = 4(\sigma_2 \cos \vartheta_2 - \sigma_1 \cos \vartheta_1) : (\rho\, g d)\,, \qquad (1)$$

dar $\vartheta_1 = 0$ (udă perfect) și $\vartheta_2 = 180^o$ (nu udă deloc), iar $\sigma_1 = \sigma_2$, altfel spus se inversează sensul forțelor de tensiune superficială: în loc să tragă de tub în jos, ele vor trage de tub în sus :

$$\Delta h = -\,8\,\sigma : (\rho\, g d) = -\,3{,}5 \text{ mm (se ridică)}\,. \qquad (2)$$

* *

4.2. Fenomene capilare

4.2.1. ***Aflați coeficientul de tensiune superficială al unui lichid, ştiind că într-un capilar de rază interioară*** r = 2,00 mm, ***cufundat vertical într-un lichid, care udă perfect sticla, intră o masă*** m = 90 mg ***de lichid. Dacă picurăm lichidul prin capilar, care va fi masa unei picături ?***

Rezolvare. Conform formulei ascensiunii capilare (***Jurin***) ($\vartheta = 0$): $h = 2\sigma / (r\rho g)$, dar $m = \rho\,\pi r^2 h$, (1)

$\sigma = h\,r\rho g / 2 = [m / (\rho\,\pi r^2)]\,r\rho g / 2 = mg / (2\pi r) = 70$ mN/m . (2)

În momentul desprinderii unei picături greutatea ei mg învinge rezultanta forțelor de tensiune superficială, care acționează pe conturul circular al orificiului capilarului : $\sigma \cdot 2\pi r$,

$m_0 g = \sigma \cdot 2\pi r$, $m_0 = 2\pi r\sigma / g = m = 90$ mg . (3)

În capilarul cufundat în lichid intră exact o picătură de lichid.

4.2.2. ***Într-o lampă cu petrol, petrolul urcă prin fitil o distanță*** h = 10 cm. ***Care trebuie să fie diametrul porilor din fitil (presupuşi cilindrici) ?***

Rezolvare. Conform formulei ascensiunii capilare (***Jurin***) ($\vartheta = 0$): $h = 2\sigma / (r\rho g)$, $D = 2\,r = 4\sigma / (\rho g h) = 0{,}15$ mm .

4.2.3. ***Un tub capilar cu raza interioară*** r = 0,16 mm ***este cufundat vertical în apă. Cu cât trebuie să mărim presiunea aerului din tubul capilar pentru a desființa ascensiunea capilară ?***

Rezolvare. De o parte şi de alta a unui menisc de lichid presiunea este diferită, există un ***salt*** *de presiune* la traversarea unui menisc de lichid (R - raza de curbură a meniscului sferic) :

$\Delta p = 2\,\sigma / R$, menisc *sferic* (***Laplace***) , (1)

presiunea de partea concavă fiind mai mare. Am demonstrat această formulă la problema 4.1.17. Dăm acum o demonstrație bazată pe formula ascensiunii capilare (**Jurin**). *În baza principiului vaselor comunicante, presiunea într-un plan orizontal dus prin* ***acelaşi*** *lichid în vase comunicante este aceeaşi.* Prin urmare, la baza tubului capilar din figură presiunea trebuie să fie egală cu presiunea atmosferică H. Dar atunci la înălțimea h în lichidul din

capilar, presiunea va fi $H - \rho gh$ şi deci saltul de presiune este chiar ρgh:

$\Delta p = \rho gh = \rho g \cdot 2\sigma\cos\vartheta : (r\rho g) = 2\sigma\cos\vartheta : r = 2\sigma / R$, (1)

(r - raza tubului cilindric, R - raza de curbură a meniscului, adică raza sferei din care face parte meniscul).

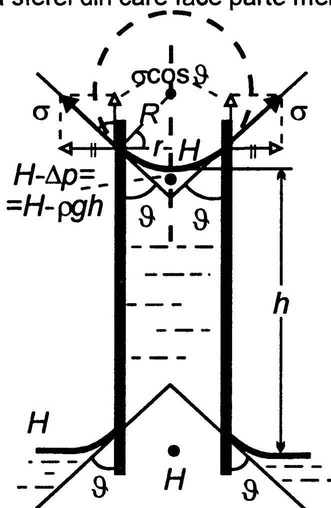


Fig.4.2.3

Acum este clar că pentru a desfiinţa ascensiunea capilară trebuie să mărim presiunea aerului din tubul capilar exact cu Δp:

$\Delta p = \rho gh = 2\sigma\cos\vartheta : r = 0{,}91$ kPa = 6,8 torr , (2)

unde pentru apă - sticlă ϑ se poate lua zero. (Δp de mai sus , exprimat în **mm col. lich.** coincide practic cu h exprimat în mm.)

4.2.4. ***Diametrul interior al unui tub barometric este*** D = = 7,0 mm. ***Calculaţi corecţia care trebuie adusă înălţimii coloanei de mercur pentru a putea calcula presiunea atmosferică cu formula presiunii hidrostatice a coloanei de mercur.*** .

Rezolvare. Considerând că mercurul practic nu udă deloc sticla, forţele de tensiune superficială aduc o presiune suplimentară asupra capătului superior al coloanei de mercur micşorând coloana cu $\Delta h = 2\sigma / (\rho gR) = 4\sigma / (\rho gD) = 2{,}0$ mm (1)

sau corecţia în unităţi de presiune :

$\Delta p \approx \rho g\Delta h = 4\sigma / D = 270$ Pa , (2)

care trebuie adăugată la valoarea presiunii , calculată sau citită în ipoteza absenţei forţelor de tensiune superficială .

4.2.5. ***Într-un vas cu apă este cufundat un capilar de rază interioară*** r = 0,50 mm, ***iar înălțimea coloanei de apă din capilar față de nivelul apei din vas (ascensiunea capilară)*** h = 20 mm. ***Aflați raza de curbură a meniscului din capilar. Care este unghiul de racordare (umectație)*** ϑ ***?***

Rezolvare. Conform formulei cunoscute pentru ascensiunea capilară (problema 4.2.3) : $h = 2\sigma/(\rho g R) = 2\sigma\cos\vartheta : (\rho g r) \rightarrow$

$$R = 2\sigma/(\rho g h) = 0{,}75 \text{ mm} > r = 0{,}50 \text{ mm} ; \qquad (1)$$

$$\cos\vartheta = r/R = 2/3 , \quad \vartheta = 48^o\, 11' . \qquad (2)$$

4.2.6. ***Într-un vas cu apă este cufundat un capilar de diametru interior*** D = 1,0 mm. ***Ascensiunea capilară este*** h = 28 mm. **a)** ***Care este raza de curbură a meniscului din capilar ?,*** **b)** ***Cât ar fi ascensiunea capilară dacă umectarea ar fi perfectă ?*** **c)** ***Care este unghiul de racordare (umectație) al apei față de capilar ?***

Rezolvare. a) Din formula ascensiunii capilare (v. problema precedentă 4.2.5):

$$R = 2\sigma/(\rho g h) = 0{,}53 \text{ mm} > D/2 = 0{,}50 \text{ mm}. \qquad (1)$$

b) $h' = 4\sigma/(\rho g D) = 29{,}8 \text{ mm} > h = 28 \text{ mm}$. (2)

c) $\cos\vartheta = r/R = D/(2R) = 0{,}94 , \quad \vartheta = 19^o\, 24'$. (3)

4.2.7. ***Într-un vas cu mercur este cufundat un tub capilar. Depresiunea capilară este*** h = - 3,7 mm. **a)** ***Care este raza de curbură a meniscului de mercur din capilar ?*** , **b)** ***Care este unghiul de racordare (umectație) dacă raza capilarului este*** r = 1,5 mm ***?***

Rezolvare. a) Analog problemei precedente 4.2.6, avem:

$$R = 2\sigma/(\rho g h) = -\,2{,}0 \text{ mm} . \qquad (1)$$

b) $\cos\vartheta = r/R = -\,0{,}75 , \quad \vartheta = 138^o\, 36'$. (2)

4.2.8. ***Într-un capilar vertical, de rază interioară*** r, ***deschis la capete, se află o coloană de apă de lungime*** h. ***Ce rază de curbură are meniscul superior şi cel inferior, dacă lungimea coloanei este:*** **a)** ***maximă posibilă,*** **b)** ***egală cu valoarea ascensiunii capilare,*** **c)*****mai mică decât valoarea ascensiunii capilare? Câte picături vor cădea dacă suflăm la capătul superior ?***

Rezolvare. În momentul desprinderii unei picături, greutatea ei $m_1 g$ învinge rezultanta forțelor de tensiune superficială care acționează pe conturul capătului inferior :

$$m_1 g = \sigma \cdot 2\pi r , \quad \text{dar } m_1 = \rho\, \pi r^2 h_1 , \quad h_1 = 2\sigma/(\rho g r) , \qquad (1)$$

înălțimea ocupată de o picătură reprezintă chiar ascensiunea capilară .

La capătul superior meniscul va fi emisferic $R_1 = r$ (considerăm că apa udă perfect sticla).

a) Lungimea maximă a coloanei va fi atunci când meniscul inferior devine emisferic cu convexitatea spre exterior, deci $R_2 = r$, şi conform figurii, diferenţa de presiune de la capetele coloanei este echilibrată de presiunea hidrostatică a coloanei :

$$\rho g h_{max} = (H + 2\sigma / R_2) - (H - 2\sigma / R_1) = 2\sigma\,(1/R_2 + 1/R_1) =$$
$$= 4\sigma / r \;\rightarrow\; h_{max} = 4\sigma / (\rho g r) = 2\,h_1\,, \tag{2}$$

dublul ascensiunii capilare, deci două picături.

b) În cazul ascensiunii capilare meniscul inferior dispare, va fi plan, $R_2 \rightarrow \infty$, atunci : $\rho g h = 2\sigma\,(1/R_2 + 1/R_1) \rightarrow$

$$2\sigma / R_1 = 2\sigma / r\;,\quad h = 2\sigma / (\rho g r) = h_1\,, \tag{3}$$

am regăsit valoarea ascensiunii capilare.

c) Dacă meniscul inferior devine concav spre exterior, R_2 schimbă semnul şi atunci :

$$\rho g h = (H - 2\sigma / |R_2|) - (H - 2\sigma / R_1) = 2\sigma\,(1/R_1 - 1/|R_2|),$$
$$h = [2\sigma / (\rho g r)]\,(1 - r / |R_2|) = h_1(1 - r / |R_2|) < h_1\,,\;(|R_2| > r). \tag{4}$$

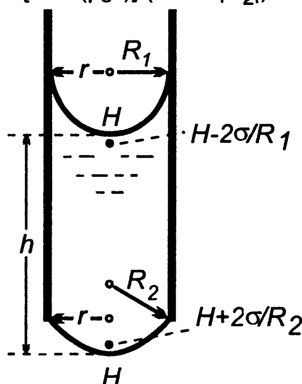


Fig.4.2.8

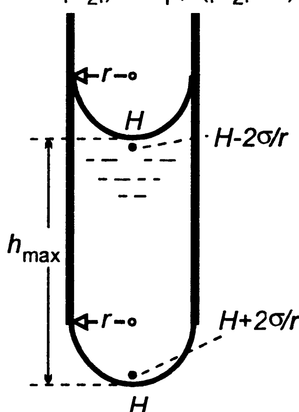


Fig.4.2.9

4.2.9. ***Într-un capilar orizontal de diametru interior*** D = 2,0 mm, ***se află o coloană de apă de lungime*** h = 10 cm. ***Punem capilarul vertical :*** a) ***Câte picături de apă vor cădea ?,*** b) ***Ce masă*** m_1 ***şi ce diametru*** D_1 ***are fiecare picătură ?,*** c) ***Ce lungime va avea coloana de apă rămasă în capilar ?*** , d) ***Ce rază de curbură*** R_2 ***va avea meniscul inferior ?***

Rezolvare. Lungimea *maximă* a coloanei se obține atunci când meniscul inferior devine convex spre exterior ca în figură. Diferența de presiune de la capetele coloanei de mercur este echilibrată de presiunea hidrostatică $\rho g h$:

$$\rho g h_{max} = (H + 2\sigma / r) - (H - 2\sigma / r) = 4\sigma / r,$$

$$h_{max} = 4\sigma / (\rho g r) = 2 h_1, \quad (D = 2r), \tag{1}$$

unde h_1 este valoarea ascensiunii capilare.

a) În momentul desprinderii greutatea picăturii învinge rezultanta forțelor de tensiune superficială :

$$m_1 g = \sigma \cdot 2\pi r, \quad \text{dar} \quad m_1 = \rho \pi r^2 h_1, \tag{2}$$

$$h_1 = 2\sigma / (\rho g r) = 14{,}9 \text{ mm - înălțimea ocupată de o picătură} . \tag{3}$$

Numărul de picături care vor cădea este egal cu numărul de înălțimi h_1 care se cuprind în înălțimea h dată , ***minus* 1**, deoarece în capilar rămâne o coloană $< 2h_1$, dar $> h_1$,

$$N = [\, h / h_1 - 1 \,] = 5 \text{ picături}, \tag{4}$$

unde [...] înseamnă *partea întreagă* a numărului cuprins între paranteze.

b) $m_1 = \sigma \pi D / g = 0{,}468$ mg , (5)

$$m_1 = \rho \pi D_1^3 / 6 = \sigma \pi D / g, \quad D_1 = \sqrt[3]{6\pi D / (\rho g)} = 4{,}47 \text{ mm}. \tag{6}$$

c) Înălțimea coloanei de apă rămasă în capilar :

$$h_r = h - N h_1 = 25{,}5 \text{ mm} . \tag{7}$$

d) Presiunea hidrostatică a coloanei rămase este echilibrată de diferența presiunilor de la capetele coloanei :

$$\rho g h_r = (H + 2\sigma / R_2) - (H - 2\sigma / r) = 2\sigma\, (1/R_2 + 1/r) =$$

$$= \rho g r h_1 (1/R_2 + 1/r) \rightarrow R_2 = r : (h_r / h_1 - 1) = 1{,}4 \text{ mm} . \tag{8}$$

4.2.10. ***Pe fundul unui vas cu mercur există un mic orificiu. Ce diametru maxim poate avea acest orificiu pentru ca mercurul să nu curgă, dacă stratul de mercur are înălțimea*** h = = 30 mm *?*

Rezolvare. Spre exteriorul orificiului se va forma un menisc convex care ține în echilibru coloana de mercur de deasupra, deci avem condiția : $\rho\, (\pi D^2 / 4)\, h g = \sigma \cdot \pi D \rightarrow$

$$D \leq 4\sigma / (\rho g h) = 0{,}50 \text{ mm} . \tag{1}$$

Sau altfel, saltul de presiune la traversarea meniscului inferior este anihilat de presiunea hidrostatică a coloanei de mercur de deasupra:

$$\Delta p = 2\sigma / R = 4\sigma / D = \rho g h . \tag{2}$$

Observăm că h corespunde ascensiunii capilare (*Jurin*).

4.2.11. ***Pe fundul unui vas de secțiune*** S = 30 cm^2 ***există un orificiu de diametru*** D = 0,50 mm. ***Ce masă de mercur poate fi turnată în vas, fără să curgă prin orificiu ?***

Rezolvare. Analog problemei precedente 4.2.10, spre exteriorul orificiului bombează meniscul convex de mercur, astfel încât forțele de tensiune superficială echilibrează greutatea coloanei de mercur de deasupra, sau altfel, saltul de presiune la traversarea meniscului va fi echilibrat de presiunea hidrostatică a coloanei de mercur de deasupra :

$$\Delta p = 4\,\sigma / D = \rho\, g h\,. \qquad (1)$$

(h corespunde ascensiunii capilare *Jurin*).

$$m = \rho\, S \cdot h = \rho\, S \cdot 4\,\sigma / (\rho\, g D) = [4\,\sigma / (g D)]\, S = 1{,}22 \text{ kg}\,. \qquad (2)$$

4.2.12. ***Aflați diferența de nivel a mercurului între două tuburi capilare comunicante de diametre*** D_1 = 1,0 mm ***și*** D_2 = = 2,0 mm .

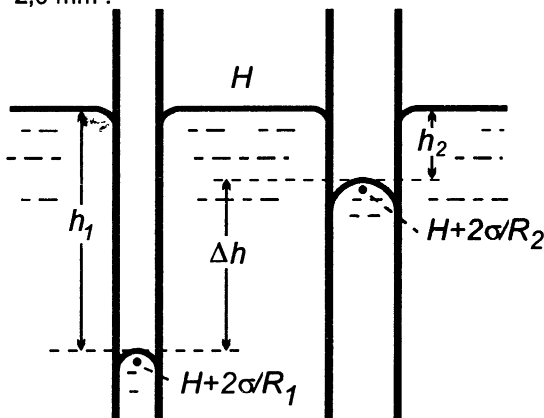


Fig.4.2.12

Rezolvare. Diferența de nivel provine din diferența depresiunilor capilare, așa cum se vede în figură. Aplicăm formula lui *Jurin*:

$$\Delta h = h_1 - h_2 = [4\sigma / (\rho g)]\,(1/D_1 - 1/D_2) = 7{,}5 \text{ mm}\,.$$

4.2.13. ***În două tuburi comunicante cu apă diferența de nivel este*** Δh_1 = 2,6 cm , ***iar cu alcool este*** Δh_2 = 1,0 cm. ***Cunoscând coeficientul de tensiune superficială al apei și densitățile lichidelor, aflați*** σ ***pentru alcool.***

Rezolvare. Analog problemei precedente 4.2.12, diferența de nivel provine din diferența ascensiunilor capilare, conform formulei lui **Jurin** :

$$\Delta h_1 = [2\sigma_1 / (\rho_1 g)]\,(1/R_1 - 1/R_2)\,,$$

$$\Delta h_2 = [2\sigma_2 / (\rho_2 g)]\,(1/R_1 - 1/R_2)\,. \qquad (1)$$

Prin împărțirea membru la membru a ecuațiilor, obținem:

$\Delta h_2 : \Delta h_1 = \sigma_2 \rho_1 : (\sigma_1 \rho_2) \rightarrow$

$\sigma_2 = \sigma_1 (\Delta h_2 / \Delta h_1) \rho_2 / \rho_1 = 21$ mN/m . (2)

4.2.14. ***Tubul îndoit din figură cu razele*** $r_1 = 0,50$ mm , $r_2 = 0,90$ mm, ***este umplut cu petrol (udă complet sticla). Pentru ce denivelări*** Δh ***meniscul inferior va fi : a) convex cu*** $|R_1| = r_1$, **b)** ***convex cu*** $|R_1| = r_2$, **c)** ***plan*** $(R_1 \rightarrow \infty)$, **d)** ***concav cu*** $R_1 = r_2$, **e)** ***concav cu*** $R_1 = r_1$ *?*

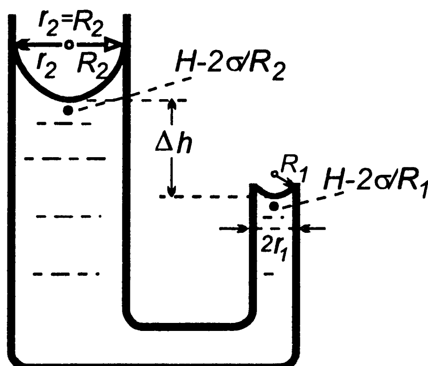


Fig.4.2.14

Rezolvare. Considerând cazul din figură ($R_2 = r_2$), diferența presiunilor în petrol de la capetele tubului îndoit este echilibrată de presiunea hidrostatică a coloanei de petrol :

$\rho g \Delta h = (H - 2\sigma / R_1) - (H - 2\sigma / r_2) = 2\sigma(1/r_2 - 1/R_1)$, (1)

$\Delta h = [2\sigma / (\rho g r_2)] (1 - r_2 / R_1)$, $h_2 = 2\sigma / (\rho g r_2) = 7,4$ mm , (2)

$\Delta h = h_2 (1 - r_2 / R_1) = 7,4 (1 - r_2 / R_1)$, [mm] . (3)

Pentru ca $\Delta h \geq 0$, trebuie ca

$1 - r_2 / R_1 \geq 0$ sau $(R_1 - r_2) / R_1 \geq 0 \rightarrow R_1 < 0$ sau $R_1 \geq r_2$. (4)

Pe de altă parte, $|R_1| \geq r_1$, deci $\Delta h > 0 \rightarrow$

$R_1 \leq - r_1$ (menisc convex) sau $R_1 \geq r_2$ (menisc concav) . (5)

a) Δh_{max} se obține atunci când meniscul *1* este convex (bombat) spre exterior, adică $R_1 = - r_1$ în formula (3) :

$\Delta h_{max} = h_2 (1 + r_2 / r_1) = 20,7$ mm . (6)

Dacă am turna petrol mai mult, atunci surplusul va curge prin capătul inferior *1* .

b) Facem în (3) $R_1 = - r_2$:

$\Delta h = h_2 (1 + r_2 / r_2) = 14{,}8$ mm . (7)

c) Pentru menisc *1 plan* facem $R_1 \to \infty$: $\Delta h = h_2$ (8) (ascensiunea capilară obişnuită în ramura *2*).

d) $R_1 = r_2$, meniscurile sunt de aceeaşi rază de curbură r_2 în ambele ramuri, deci denivelarea se anulează $\Delta h = 0$.

e) Dacă acum $r_1 \leq R_1 < r_2$, denivelarea se inversează şi pentru $R_1 = r_1$ este din nou maximă (dar inversată),

$\Delta h_m = h_2 (1 - r_2 / r_1) = - (h_1 - h_2) = - 5{,}9$ mm . (9)

Pin urmare, denivelarea este cuprinsă în intervalul :

$$\Delta h_{max} \geq \Delta h \geq \Delta h_m \qquad (10)$$

şi nu poate depăşi aceste limite, căci altfel , dacă $\Delta h > \Delta h_{max}$, petrolul va curge prin capătul *1* sau dacă $\Delta h < \Delta h_m$, petrolul din *1* va coborî.

4.2.15. *Între două plăci plan-paralele de sticlă, cu distanța dintre ele* d = 0,25 mm, ***ascensiunea capilară a unui lichid , care udă complet sticla (cu*** σ = 30 mN/m***), este*** h = 31 mm. ***Aflați densitatea lichidului .***

Rezolvare. Meniscul lichidului între două plăci plan-paralele este de forma unui *jgheab* cilindric orizontal, care devine *semi*-cilindru dacă lichidul udă *perfect* pereții. Conform formulei de la problema 4.1.19 : $h = 2\sigma / (\rho g d) \to \rho = 2\sigma / (hgd) = 790$ kg/m^3 .

4.2.16. *Două plăci plan-paralele verticale de sticlă sunt parțial cufundate în alcool. Distanța dintre plăci* d = 0,20 mm, ***lățimea*** ℓ = 19,0 cm. ***Aflați ascensiunea capilară (unghiul de racordare*** ϑ = 0***) şi forța cu care se atrag plăcile .***

Rezolvare. Conform rezultatului de la problema 4.1.19 sau de la problema precedentă 4.2.16 : $h = 2\sigma / (\rho g d) = 2{,}8$ cm . (1)

Presiunea în lichid imediat sub menisc este

$$H - \sigma / R = H - 2\sigma / d . \qquad (2)$$

Pe măsură ce coborîm în lichid presiunea creşte cu $\rho g x$:

$$p = H - 2\sigma / d + \rho g x . \qquad (3)$$

Prin urmare, diferența de presiune dintre exterior şi interiorul lichidului scade *uniform* : $\Delta p = H - p = 2\sigma / d - \rho g x =$

$= 2\sigma / d - (2\sigma / d)\, x / h = (2\sigma / d)(1 - x / h)$, $x \in (0, h)$. (4)

Pentru a calcula forța de atracție dintre plăci, luăm o diferență de presiune *medie*, adică $(x = h / 2)$:

$\overline{\Delta p} = \sigma / d$, $F = \overline{\Delta p} \cdot S = \overline{\Delta p} \cdot \ell h = (\sigma / d) \ell h =$

$= 2\sigma^2 \ell : (\rho g d^2) = 0{,}59$ N . (5)

4.2.17. ***Două plăci plan-paralele verticale sunt cufundate parțial într-un lichid care le udă perfect. Se cunosc : lățimea plăcilor*** ℓ ***, distanța dintre plăci*** d, ***densitatea lichidului*** ρ, ***tensiunea superficială*** σ, ***unghiul de racordare*** ϑ. ***Aflați forța exercitată asupra plăcilor.***

Rezolvare. Analog problemei precedente 4.2.16 sau problemei 4.1.19, avem: $\Delta p = \sigma / R$, dar $d/2 = R \cos \vartheta$,

$$\Delta p = 2 \sigma \cos \vartheta / d . \quad (1)$$

Acest salt de presiune, de la meniscul superior , scade ***liniar*** până la anulare la baza păturii ascendente. Luăm o diferență ***medie*** de presiune şi calculăm forța :

$$F = (\Delta p / 2) \cdot \ell h = 2 \ell \sigma^2 \cos^2 \vartheta : (\rho g d^2) . \quad (2)$$

Plăcile se "atrag" cu această forță (sunt împinse de presiunea atmosferică una spre cealaltă).

4.2.18. ***Două plăci verticale, formând un unghi diedru de unghi foarte mic*** α ***, sunt cufundate într-un lichid de densitate*** ρ, ***tensiune superficială*** σ ***şi unghi de racordare*** ϑ. ***Care va fi ecuația*** **liniei** ***de ascensiune capilară între plăci ?***

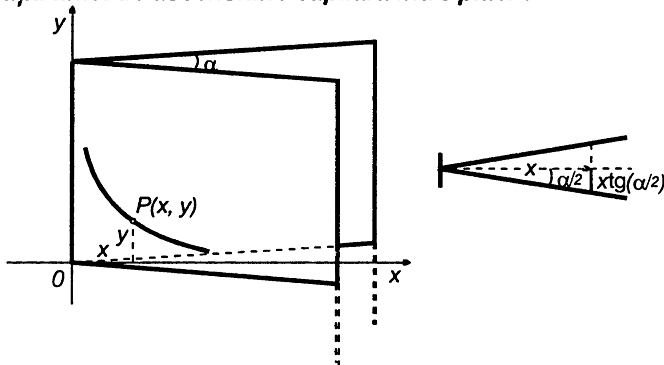


Fig.4.2.18

Rezolvare. Meniscul are forma unui jgheab înclinat. Luând o porțiune extrem de mică din acest jgheab, saltul de presiune la trecerea prin stratul superficial va fi :

$$\sigma \cos \vartheta : [x \operatorname{tg}(\alpha / 2)] \approx 2 \sigma \cos \vartheta : (x \alpha) \quad (1)$$

(sub menisc presiunea este mai mică decât cea atmosferică), unde pentru unghiuri α mici ($< 6^{o}$) , tg α, la fel ca şi sin α, se aproximează prin unghiul α însuşi dar exprimat în ***radiani***.

Diferența de presiune (1) este echilibrată de presiunea hidrostatică a coloanei de lichid :

$$\rho g y = 2\,\sigma \cos \vartheta : (x\,\alpha) \;\rightarrow\; y = [2\,\sigma \cos \vartheta : (\rho g \alpha)] \cdot (1/x)\,, \qquad (2)$$

ceea ce reprezintă ecuația unei *iperbole echilatere* , având ca asimptote orizontala şi muchea verticală a unghiului diedru.

4.2.19. ***Un tub capilar cu capătul superior închis este cufundat vertical în apă. Dacă se cufundă tubul cu*** f = 1,5 % ***din lungimea sa, ascensiunea capilară nu apare. Aflați raza interioară a capilarului. Presiunea atmosferică*** H = 750 torr. ***Care va fi ascensiunea capilară imediat după atingerea lichidului, dacă lungimea tubului*** ℓ = 80 mm ?

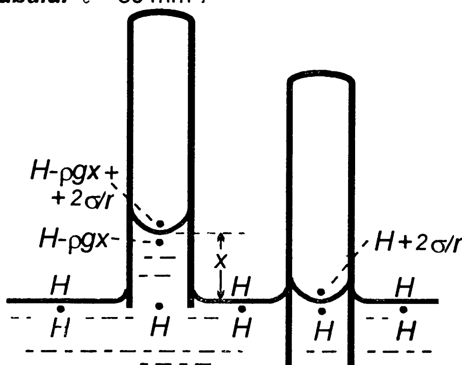


Fig.4.2.19

Rezolvare. În momentul atingerii lichidului în capilar se izolează o anumită masă de aer la presiunea atmosferică, care suferă o transformare *izotermă*. În starea intermediară şi cea finală, presiunea aerului se obține ținând seama de saltul de presiune :

$$H\,\ell = (H - \rho g x + 2\sigma / r)\,(\ell - x) = (H + 2\sigma / r)\,(1 - f)\,\ell. \qquad (1)$$

Din prima şi ultima egalitate obținem r :

$$H + 2\sigma / r = H / (1 - f) \;\rightarrow\; r = 2\,\sigma\,(1 - f) : (Hf) = 0{,}10 \text{ mm}\,. \qquad (2)$$

Deoarece ascensiunea capilară $x \ll \ell$, putem neglija termenul pătratic în x în ecuația (1) :

$$\rho g x^2 - x\,[\,\rho g\,\ell + H / (1 - f)] + H\,\ell\, f / (1 - f) = 0\,, \qquad (3)$$

$$x \approx H\,\ell\, f : [H + (1 - f)\,\rho g\,\ell\,] = [f\,\ell\, H / (\rho g)] : [(1 - f)\,\ell + H / (\rho g)] \approx$$

$$\approx f\,\ell = 1{,}2 \text{ mm}\,, \qquad (4)$$

dacă neglijăm $(1 - f)\,\ell \approx 80 \text{ mm} \ll H / (\rho g) = 750 \text{ mm}$.

4.2.20. ***La ce adâncime*** h ***în apă s-au format bule de gaz dacă ajungând la suprafață raza lor este*** r = 1,53 μm ***şi a crescut de*** N = 1,1 ori . ***Presiunea atmosferică este*** H = 750 torr ***?***

Rezolvare. Raza bulei la adâncimea h este r/N, iar volumul V/N^3. Aerul din interiorul bulei suferă o transformare izotermă, Pentru a afla presiunea aerului din interior trebuie să ținem seama de forțele de tensiune superficială, şi anume la trecerea prin stratul superficial al apei care delimitează bula avem un salt de presiune :

$\Delta p = 2\sigma / r$.   Legea *Boyle-Mariotte* se scrie :

$$[(H + \rho g h + 2\sigma/(r/N)] V/N^3 = (H + 2\sigma/r) V, \qquad (1)$$

de unde rezultă

$$h = [H/(\rho g)](N^3 - 1) + [2\sigma/(\rho g r)] N(N^2 - 1) = 5{,}6 \text{ m}. \qquad (2)$$

4.2.21. ***Un capilar de lungime*** $\ell = 10$ cm ***şi rază*** r = 1,2 mm, ***cu capătul superior sudat, se cufundă vertical, pe jumătate, într-un lichid de densitate*** $\rho = 1000$ kg/m^3. ***Se constată că ascensiunea capilară este*** h = 10 mm ***(unghiul de racordare*** $\vartheta = 0$***). Presiunea atmosferică este normală. Aflați coeficientul de tensiune superficială a lichidului.***

Rezolvare. Analog problemei 4.2.19, aerul închis în capilar suferă o transformare *izotermă*. Trebuie să ținem seama de saltul de presiune la traversarea meniscului de lichid :

$$H\ell = p(\ell/2 - h), \quad \text{dar} \quad p - 2\sigma/r + \rho g h = H, \qquad (1)$$

$$H\ell = (H - \rho g h + 2\sigma/r)(\ell/2 - h), \qquad (2)$$

$$\sigma = (r/2)[H(\ell + 2h)/(\ell - 2h) + \rho g h] = 74 \text{ mN/m}. \qquad (3)$$

4.2.22. ***Un tub capilar de rază*** r = 0,20 mm ***şi lungime*** $\ell = 80$ mm ***atinge cu capătul inferior suprafața apei. Temperatura de-a lungul tubului capilar creşte uniform de la*** 0°C ***la capătul inferior, până la*** $t_f = 100$°C ***la capătul superior. Coeficientul de tensiune superficială al apei depinde de temperatură conform tabelului :***

t, °C	0	20	50	90
σ, mN/m	76	73	67	60

La ce înălțime urcă apa în capilar ?

Rezolvare. Din variația *liniară* a temperaturii avem

$$t_f/\ell = t/x \rightarrow t = x\, t_f/\ell. \qquad (1)$$

Condiția de echilibru a coloanei de mercur:

$$mg = \sigma \cdot 2\pi r \quad \text{sau} \quad \rho \pi r^2 x g = \sigma \cdot 2\pi r,$$

$$\sigma = (1/2)\rho r g x = [\rho r g \ell/(2 t_f)] \cdot t = 78{,}4 \cdot 10^{-5}\, t. \qquad (2)$$

Dar σ variază cu temperatura după tabel. Problema se rezolvă în acest caz ***grafic***. Reprezentăm $\sigma = f(t)$ conform tabelului şi inter-

sectăm cu curba $\sigma(t)$ (2). Conform graficului punctul de intersecție are coordonatele : $t = 80\ ^oC$, $\sigma = 62$ mN/m, deci

$$x = \ell\, t / t_f = 6{,}4 \text{ cm} . \qquad (3)$$

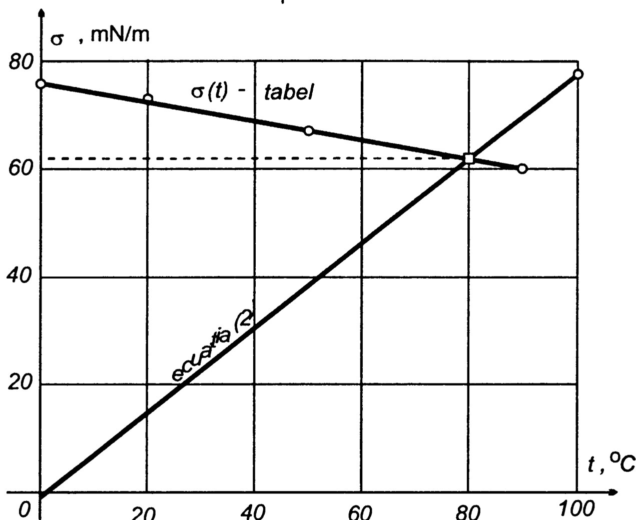


Fig.4.2.22

4.2.23. ***Un tub capilar din sticlă, cu raza interioară*** r = 0,10 mm, ***este cufundat vertical, adânc în mercur, astfel încât rămâne în afară o lungime*** ℓ = 12,5 cm. ***Se astupă capătul superior. Cu cât trebuie să tragem în sus capilarul pentru ca depresiunea capilară să dispară ? Presiunea atmosferică*** H = 100 kPa .

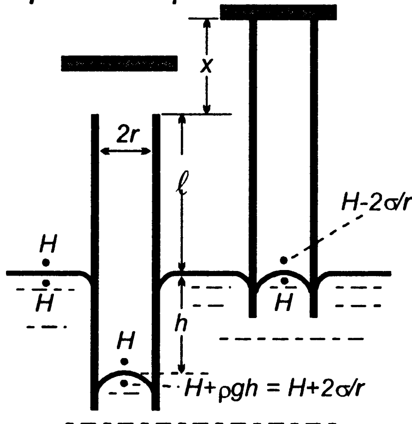


Fig.4.2.23

Rezolvare. Aerul închis în capilar are (inițial) presiunea egală cu cea atmosferică şi lungimea $\ell + 2\sigma/(\rho g r)$ şi suferă o transformare *izotermă*. Presiunea finală va fi $H - 2\sigma/r$ (saltul de presiune la traversarea meniscului), deci

$$H[\ell + 2\sigma/(\rho g r)] = (H - 2\sigma/r)(\ell + x)\,, \quad (1)$$

$$x = [\ell + 2\sigma/(\rho g r)]\,H : (H - 2\sigma/r) - \ell = 9{,}5\ \text{cm}\,. \quad (2)$$

(*) **4.2.24.** ***O buclă din fir de cauciuc, având lungimea*** ℓ_0 ***şi secțiunea transversală*** S ***este aşezată pe o peliculă de lichid. Găurind pelicula în interiorul buclei, firul s-a întins formând o circumferință de rază*** R. ***Cunoscând modulul de elasticitate*** E ***al cauciucului, aflați coeficientul de tensiune superficială*** σ ***al lichidului .***

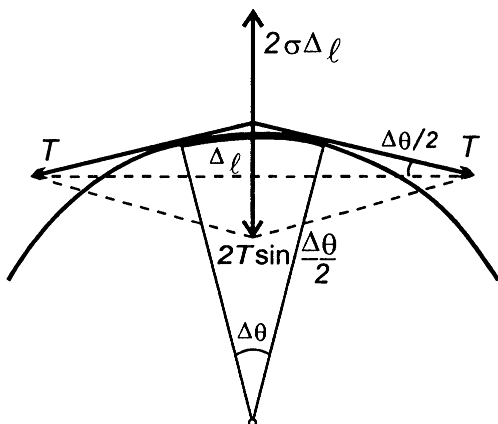


Fig.4.2.24

Rezolvare. Luăm un element de fir de lungime $\Delta\ell$ care subîntinde un unghi la centru $\Delta\theta$. El este supus la cele două tensiuni de la capete care dau o rezultantă *centripetă* $2T\sin(\Delta\theta/2)$ şi la forța de tensiune superficială $2\sigma\,\Delta\ell$ care este *centrifugă*. Observăm că o peliculă de lichid este mărginită de o parte şi de alta de câte un strat superficial, de aceea apare $2\sigma\,\Delta\ell$ şi *nu* $\sigma\,\Delta\ell$!

Condiția de echilibru dă : $2T\sin(\Delta\theta/2) = 2\sigma\,\Delta\ell\,,$ (1)

dar $\ell/(2\pi) = \Delta\ell/\Delta\theta$ şi $\sin(\Delta\theta/2) \to \Delta\theta/2$ (în radiani) (2)

(pentru unghiuri mici, $\Delta\theta/2 < 6^{o}$).

Atunci (1) devine $T\Delta\theta = 2\sigma[\ell/(2\pi)]\Delta\theta \to$

$$T = 2\sigma[\ell/(2\pi)] = 2\sigma R\,. \quad (3)$$

Dar conform *legii lui* **Hooke** :

$$T = ES\,\Delta\ell / \ell_0 = ES\,(2\pi R - \ell_0) / \ell_0 . \qquad (4)$$

Din (3), (4) rezultă

$$\sigma = ES\,(2\pi R - \ell_0) / (2\ell_0 R) . \qquad (5)$$

* * **4.2.25.** ***Un tub capilar de rază*** r = 1,0 mm, ***îndoit şi umplut complet cu apă, este rotit în jurul ramurii verticale. Pentru ce viteză unghiulară apa va începe să iasă din capilar ? Apa are coeficientul de tensiune superficială*** σ = 74,5 mN/m ***şi udă complet capilarul care are dimensiunile*** h = 10 mm, ℓ = 20 cm .

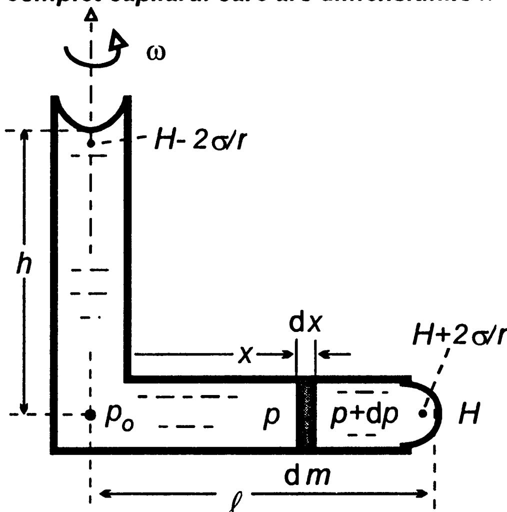


Fig.4.2.25

Rezolvare. Meniscul superior este emisferic concav de rază *r*. Cel inferior devine *în momentul curgerii* emisferic convex tot de rază *r*. Pentru ca în repaus tubul să fie complet umplut cu apă trebuie ca

$$H - 2\sigma / r + \rho g h - 2\sigma / r \leq H , \qquad (1)$$

unde $2\,\sigma / r$ reprezintă saltul de presiune la traversarea meniscului sferic.

Să considerăm un *element* de volum $\mathrm{d}V = S\mathrm{d}x$ situat la distanța *x* de axa de rotație. El efectuează o mişcare de *circulară*, deci

$\mathrm{dF} = \mathrm{d}m \cdot \omega^2 x$, unde $\mathrm{d}F = (p + \mathrm{d}p)S - \mathrm{p}S = S\mathrm{d}p$, (2)

deci

$$Sdp = \rho S dx\, \omega^2 x \quad \text{sau} \quad dp = \rho\, \omega^2 x dx\,. \tag{3}$$

Integrăm:

$$\int dp = p = \int \rho\omega^2 x\, dx = (1/2)\, \rho\, \omega^2 x^2 + C\,,$$

unde constanta de integrare C se determină din *condiția la **margine***, ca pentru $x = 0$ să avem

$$p = p_o = H - 2\sigma / r + \rho g h\,; \tag{4}$$

deci

$$p_o = H - 2\sigma / r + \rho g h = C\,,$$

atunci presiunea în lichid :

$$p = H - 2\sigma / r + \rho g h + (1/2)\, \rho\omega^2 x^2\,. \tag{5}$$

Putem integra şi definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_{p_0}^{p} dp = p - p_o = \rho\omega^2 \int_0^x x\, dx = \frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 \quad ,$$

unde p_o este dat mai sus : (4) .

La limită când începe curgerea, presiunea din lichid la marginea capilarului trebuie să fie $H + 2\sigma / r$. Prin urmare avem condiția :

$$H + 2\sigma / r = H - 2\sigma / r + \rho g h + (1/2)\, \rho\omega^2 \ell^2\,, \tag{6}$$

de unde

$$\omega = \sqrt{2(4\sigma / r - \rho g h) : (\rho \ell^2)} = 10 \text{ rad/s}\,. \tag{7}$$

* *

5. DILATOMETRIE ŞI TERMOMETRIE

5.1. Dilatarea solidelor

5.1.1. ***Prin încălzirea unui inel de metal, grosimea lui a crescut cu*** f = 0,40 %. ***Cu cât la sută a crescut diametrul interior al inelului ?***

Rezolvare. Prin încălzirea unui corp *izotrop* toate dimensiunile sale *liniare* cresc în aceeaşi proporţie :

$$\ell_1 = \ell_0(1 + \alpha t_1),\quad \ell_2 = \ell_0(1 + \alpha t_2)\,,\quad \Delta\ell = \ell_2 - \ell_1 = \ell_0\alpha(t_2 - t_1),$$

$$\Delta\ell = \ell_0\alpha\Delta t \rightarrow f = \Delta\ell / \ell_0 = \alpha\Delta t\,, \qquad (1)$$

ceea ce rezultă şi direct din definiţia coeficientului de dilatare liniară : $\alpha = \Delta\ell / (\ell_0\, \Delta t)$. Prin urmare, şi diametrul interior al inelului creşte tot cu f = 0,40 % .

5.1.2. ***O tijă s-a lungit cu*** $\Delta\ell_1$ = 2,0 mm ***prin încălzire cu*** ΔT_1 = 80 K. ***Încălzită până la roşu, s-a lungit cu*** $\Delta\ell_2$ = 12 mm. ***Determinaţi temperatura*** t_2 ***de încălzire până la roşu .***

Rezolvare. $\Delta\ell_1 = \ell_0\alpha\Delta T_1\,,\quad \Delta\ell_2 = \ell_0\alpha\Delta T_2\,,$ (1)

$$\Delta T_2 = \Delta T_1 \cdot \Delta\ell_2 / \Delta\ell_1 = 480\ \text{K}\,. \qquad (2)$$

Cum temperatura camere $t_c \approx 20^oC$: $\quad t_2 = t_c + \Delta T_2 = 500^oC$. (3)

5.1.3. ***Două rigle, una de aluminiu şi cealaltă de cupru, sunt aşezate în paralel, cu diviziunea*** 0 ***comună. Găsiţi o diviziune*** N_1 ***pe rigla de aluminiu şi o diviziune*** N_2 ***pe rigla de cupru, astfel încât distanţa dintre aceste diviziuni să fie*** ℓ =14 cm = const, ***independent de temperatură.***

Rezolvare. Cele două diviziuni căutate $N_{1,2}$ trebuie să se deplaseze prin dilatare cu acelaşi interval, adică creşterile de lungime ale celor două porţiuni de riglă $0N_1$ şi $0N_2$ trebuie să fie egale între ele:

$$N_1\alpha_1\Delta T = N_2\alpha_2\Delta T\quad ,\quad N_2 - N_1 = \ell\ ; \qquad (1)$$

$$N_1 = \ell \cdot \alpha_2 / (\alpha_1 - \alpha_2) = 32\ \text{cm}\,,\quad N_2 = \ell \cdot \alpha_1 / (\alpha_1 - \alpha_2) = 46\ \text{cm}\,. \qquad (2)$$

5.1.4. ***O placă bimetalică de grosime*** d = 1,0 mm ***este formată dintr-o placă de oțel şi o placă de aluminiu. La temperatura camerei placa este plană. Prin încălzire cu*** ΔT = 100°C ***placa se curbează. Aflați raza de curbură medie a plăcii astfel curbate.***

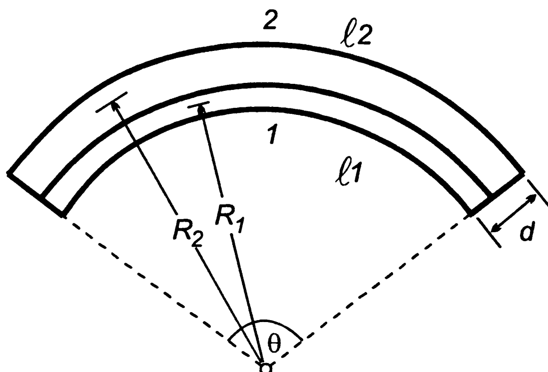


Fig.5.1.4

Rezolvare. Legea *dilatării liniare* dă :

$\ell_1 = \ell\,(1 + \alpha_1 \Delta t)$, $\ell_2 = \ell\,(1 + \alpha_2 \Delta t)$, $\ell_2 - \ell_1 = \ell\,(\alpha_2 - \alpha_1)\,\Delta t$, (1)

Pe de altă parte (θ ***în radiani !***) : $\ell_1 = R_1\,\theta$, $\ell_2 = R_2\,\theta$,

$\ell_2 - \ell_1 = (R_2 - R_1)\,\theta = (d/2)\,\theta$, (2) $\ell\,(\alpha_2 - \alpha_1)\,\Delta t = (d/2)\,\theta$, (3)

Raza de curbură medie se poate defini prin lungimea medie astfel :

$$(1/2)\,(\ell_1 + \ell_2) = R\,\theta\,,\quad R = (1/2)\,(\ell_1 + \ell_2)\,d : [2\,\ell\,(\alpha_2 - \alpha_1)\,\Delta t] =$$
$$= [2\ell + \ell\,(\alpha_1 + \alpha_2)\,\Delta t]\,d : [4\,\ell\,(\alpha_2 - \alpha_1)\,\Delta t] \approx$$
$$\approx d : [2(\alpha_2 - \alpha_1)\,\Delta t] = 42 \text{ cm}\,, \quad (4)$$

unde am neglijat termenul mic $\ell\,\alpha\,\Delta t \ll \ell$.

5.1.5. ***Două tije, de lungime*** ℓ = 1,00 m ***fiecare. una de fier şi una de alamă, sunt prinse la capetele lor comune. Prin încălzire cu*** ΔT = 300 K ***tija de fier rămâne dreaptă, iar tija de alamă se curbează. Aflați unghiul la centru*** θ ***şi "săgeata "*** f ***a tijei curbate.***

Rezolvare. $\ell_1 = 2R\sin(\theta/2) = \ell\,(1 + \alpha_1 \Delta T)$, (1)

$$\ell_2 = R\,\theta = \ell\,(1 + \alpha_2 \Delta T) \rightarrow (2/\theta)\sin(\theta/2) =$$
$$= (1 + \alpha_1 \Delta T) / (1 + \alpha_2 \Delta T)\,. \quad (2)$$

Unghiul θ fiind destul de mic, putem aproxima sinusul (v. Anexe):

$$\sin x \approx x - x^3/6 + \ldots \quad (3)$$

Nu ne putem opri la *prima* aproximație, de ordinul I (adică la termenul *liniar* în x), deoarece efectul *"dispare"* în această aproximație. $(2/\theta)(\theta/2 - \theta^3/48) \approx (1 + \alpha_1\Delta T)/(1 + \alpha_2\Delta T) \approx$

$$\approx (1 + \alpha_1\Delta T)(1 - \alpha_2\Delta T)\, 1 + (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T,$$

$$\theta = \sqrt{24(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T} = 0{,}24 \text{ rad} = 13^\circ 45'. \quad (4)$$

$$f = R - R\cos(\theta/2) = 2R\sin^2(\theta/2) \approx 2R\theta^2/16, \quad \text{dar} \quad \ell \approx R\theta,$$

$$f \approx (1/8)\,\ell\,\theta = (1/4)\,\ell\sqrt{6(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T} = 3{,}0 \text{ cm}. \quad (5)$$

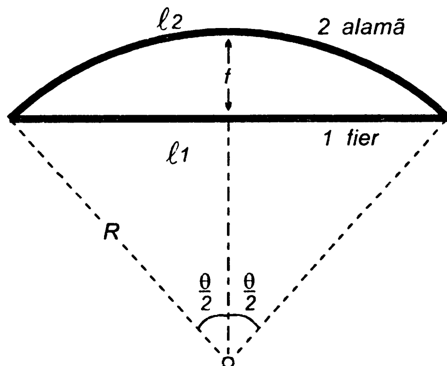


Fig.5.1.5

5.1.6. ***Coeficientul de dilatare liniară (mediu) se definește prin formula*** $\alpha = \Delta\ell : (\ell_0\Delta T) = (\ell_2 - \ell_1) : [\ell_0(t_2 - t_1)]$ ***sau***

$$\alpha = (\ell - \ell_0) : (\ell_0 t), \quad \ell = \ell_0(1 + \alpha t), \quad (*)$$

unde $\ell_{1,2}$ ***sunt lungimile la temperaturile*** $t_{1,2}$, ***iar*** ℓ_0 ***este lungimea la temperatura de* referință standard*, care de obicei este*** 0°C. ***Coeficientul*** α, ***definit prin*** (*) ***reprezintă de fapt un coeficient* mediat *pe intervalul*** (t_1, t_2), ***respectiv*** $(0, t)$.

În termotehnică, metalurgie se ia uneori temperatura de referință 100°C, 500°C ***sau*** 1000°C. ***Cum se scrie atunci formula dilatării liniare și cum putem atunci calcula coeficientul de dilatare corespunzător ?***

Rezolvare. Notăm cu t^* noua temperatură de *referință*. Atunci noul coeficient de dilatare α^* se va defini prin formula :

$$\alpha^* = \Delta\ell : (\ell^*\Delta t) = (\ell_2 - \ell_1) : [\ell^*(t_2 - t_1)] \quad \text{sau}$$

$$\alpha^* = (\ell - \ell^*) : [\ell^*(t - t^*)]. \quad (1)$$

Din ultima expresie obținem formula dilatării :

$$\ell = \ell^*[1 + \alpha^*(t - t^*)]. \quad (2)$$

Folosind definiția coeficientului standard, din enunț, avem

$$\alpha^* = (\ell_2 - \ell_1) : [\ell^*(t_2 - t_1)] = \alpha \cdot \ell_0 / \ell^* =$$

$$= \alpha\, \ell_0 : [\ell_0(1 + \alpha t^*) = \alpha / (1 + \alpha t^*). \quad (3)$$

De exemplu, pentru fier $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}$, $\alpha_{100} = \alpha / (1 + \alpha \cdot 100) =$

$$= 11{,}98 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}, \quad \alpha_{1000} = 11{,}85 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}, \quad (4)$$

deci corecțiile sunt ***foarte mici***. Aceasta justifică folosirea formulei

$$l_{final} = l_{ini•ial}[1 + \alpha(t_{final} - t_{ini•ial})] \quad \text{sau} \quad \ell_2 = \ell_1(1 + \alpha \Delta t), \quad (5)$$

unde α este cel *standard*.

5.1.7. ***Cum variază cu temperatura perioada micilor oscilații ale unui pendul simplu gravitațional ? Imaginați o suspensie a bilei pendulului, astfel ca perioada să nu varieze cu temperatura.***

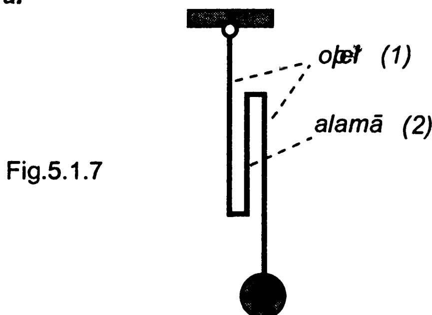


Fig.5.1.7

Rezolvare. $T = 2\pi\sqrt{\ell/g} = 2\pi\sqrt{\ell_0(1 + \alpha t)/g} =$

$$= 2\pi\sqrt{\ell_0/g}\sqrt{1 + \alpha t} = T_0\sqrt{1 + \alpha t} \approx T_0\left(1 + \frac{\alpha}{2}t\right), \quad (1)$$

unde T_0 este perioada pendulului la 0°C şi unde am aproximat radicalul, conform formulei cunoscute (v. Anexe) :

$$(1 + x)^r \approx 1 + rx, \text{ dacă } |x| \ll 1;\ r \in \mathbf{R} \quad (2)$$

(la noi $x = \alpha t$ şi $r = 1/2$).

Pentru ca perioada să nu varieze cu temperatura, tija de suspensie trebuie confecționată din două metale diferite, de exemplu, din alamă şi oțel, ca în figură. Atunci alungirile trebuie să se compenseze : $\Delta \ell = \ell_1 \alpha_1 \Delta t = \ell_2 \alpha_2 \Delta t \rightarrow \ell_1 / \ell_2 = \alpha_2 / \alpha_1$, (3)

unde $\ell_{1,2}$ sunt lungimile totale ale celor două porțiuni, din oțel (1) şi respectiv din alamă (2). Desigur lungimea *rezultantă* a tijei de suspensie trebuie să asigure perioada T dorită (pentru T=1,0 s avem $l \approx$ 0,25 m ; pentru T = 2,0 s avem $l \approx$ 1,00 m).

5.1.8. ***Cum variază cu temperatura* momentul de inerție *al unui corp solid ? Cum variază cu temperatura perioada de oscilație a unui pendul fizic?***

Rezolvare. *Momentul de inerție* al unui corp față de o axă este o mărime *aditivă*, egală cu suma momentelor de inerție ale particulelor componente :

$$I = \sum I_k = \sum_{k=1}^{N} m_k R_k^2 \quad , \qquad (1)$$

unde m_k este masa particulei de indice k şi R_k - distanța sa până la axă, momentul de inerție a unei particule fiind $m_k R_k^2$.

Datorită dilatării:

$$I = \sum m_k R_k^2 = \sum m_k R_{ok}^2 (1 + \alpha t)^2 =$$
$$= I_o(1 + \alpha t)^2 \approx I_o(1 + 2\alpha t) \,, \qquad (2)$$

unde I_o este momentul de inerție la 0^oC.

Perioada micilor oscilații ale unui pendul fizic este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgR_{cm}}} \quad , \qquad (3)$$

unde I este *momentul de inerție* al corpului față de axa de oscilație, iar R_{cm} - distanța *centrului de masă* până la axa de oscilație.

Datorită dilatării :

$$T = \sqrt{\frac{I_o(1+\alpha t)^2}{mgR_{ocm}(1+\alpha t)}} = T_o\sqrt{1+\alpha t} \quad ,$$
$$T \approx T_o[1 + (\alpha / 2) t] \,, \qquad (4)$$

unde T_o este perioada micilor oscilații la 0^oC. Variația cu temperatura este la fel ca la pendulul simplu gravitațional .

5.1.9. ***Evaluați timpul cu care avansează sau întârzie în*** D = 24 h ***un ceasornic cu pendul, datorită schimbării temperaturii din cameră .***

Rezolvare. Fie T^* , t^* perioada şi temperatura pentru care ceasornicul merge *exact*, iar T - perioada la temperatura t. Atunci în D = 24 h ceasornicul face $N = D / T$ oscilații, iar fiecare oscilație deplasează acul indicator al cadranului cu T^* ! (adică fiecare oscilație, indiferent de durata ei, ceasornicul o înregistrează ca fiind T^*). Deci timpul înregistrat în D = 24 h va fi

$$D + \Delta\tau = N\,T^* = D\,T^*/\,T \quad \text{sau} \quad (D + \Delta\tau) / D = T^*/\,T \,, (1)$$

raportul timpilor înregistrați este egal cu raportul invers al perioadelor (sau timpul înregistrat este *invers proporțional* cu perioada). Dar perioada variază cu temperatura după formula (v. problema precedentă 5.1.8):

$$T = T^*[1 + (\alpha / 2)(t - t^*)] = T^*[1 + (\alpha / 2)\Delta t] , \quad (2)$$

$$\Delta\tau = - D (T - T^*) / T = - (\alpha / 2) \Delta t : [1 + (\alpha / 2)\Delta t] \approx$$

$$\approx - (1/2) D \alpha\Delta t = - (1/2) D \alpha (t - t^*) , \quad (3)$$

deci la o creştere a temperaturii, $t > t^*$, ceasornicul întârzie :

$$\Delta\tau = - (1/2) \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} \cdot 20 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} \cdot 5 \text{ K} \approx - 5 \text{ s} . (4)$$

5.1.10. ***Un ceasornic cu pendul întârzie cu*** $\tau_1 = 3{,}0$ s ***în*** D = = 24 h ***la temperatura*** $t_1 = 26^oC$ ***şi înaintează cu*** $\tau_2 = 9{,}0$ s ***în*** D = = 24 h ***la temperatura*** $t_2 = 6{,}0^oC$. ***Aflați coeficientul de dilatare liniară*** α ***al materialului pendulului, precum şi temperatura*** θ ***la care ceasornicul merge exact .***

Rezolvare. Vom folosi rezultatul de la problema precedentă 5.1.9 : $\quad - \tau_1 = - (1/2) D \alpha (t_1 - \theta) , \quad \tau_2 = - (1/2) D \alpha (t_2 - \theta) . \quad (1)$

Din aceste două ecuații rezultă :

$$\alpha = [2 / (t_1 - t_2) (\tau_1 + \tau_2) / D = 13{,}9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} , \quad (2)$$

$$\theta = (\tau_1 t_2 + \tau_2 t_1) / (\tau_1 + \tau_2) = 21^oC . \quad (3)$$

5.1.11. ***Din cuarț cristalin se taie, într-un plan paralel cu axa sa de simetrie, o placă rotundă de rază*** R = 30 mm ***la temperatura*** $t_1 = 20^oC$. ***Cu cât va creşte aria plăcii atunci când este încălzită până la temperatura*** $t_2 = 100^oC$ ***?***

Rezolvare. *Cristalele* se dilată *diferit* după *diferite* axe cristalografice de simetrie (cristalele sunt *anizotrope*). În planul plăcii tăiate pe direcția axei cristalografice de simetrie coeficientul de dilatare este $\alpha_{\parallel} = 7{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, iar pe direcție perpendiculară $\alpha_{\perp}$ = = $13{,}7 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Prin încălzire placa rotundă devine *eliptică*, cu axa mică paralelă cu axa cristalografică şi cu axa mare perpendiculară pe axa cristalografică. Aria elipsei este πab, unde *a, b* sunt semiaxele elipsei. În cazul nostru :

$$S = \pi \cdot R(1 + \alpha_{\parallel}\Delta t) \cdot R(1 + \alpha_{\perp}\Delta t) \approx \pi R^2 [1 + (\alpha_{\parallel} + \alpha_{\perp}) \Delta t] ,$$

$$\Delta S = S - \pi R^2 = \pi R^2 (\alpha_{\parallel} + \alpha_{\perp}) \Delta t = 4{,}8 \text{ mm}^2 .$$

5.1.12. ***Două tije au la temperatura*** $t_1 = 10^oC$ ***lungimi egale, iar la temperatura*** $t_3 = 20^oC$ ***au volume egale. La ce temperatu-***

ră t_2 ***secțiunile lor transversale vor fi egale ? Arătați că*** t_3 ***este cuprins între*** t_1 ***și*** t_2 .

Rezolvare. Fie ℓ lungimea tijelor și S' , S'' secțiunile tijelor la temperatura t_1, atunci încălzind tijele de la t_1 la t_2 se egalează ariile: $S'[1 + 2\alpha_1(t_2 - t_1)] = S''[1 + 2\alpha_2(t_2 - t_1)]$,(1)

iar la temperatura t_3 se egalează volumele :

$$(\ell S')\,[1 + 3\alpha_1(t_3 - t_1)] = (\ell S'')\,[1 + 3\alpha_2(t_3 - t_1)] . \qquad (2)$$

Împărțind ecuațiile membru la membru, obținem :

$$[1+2\alpha_1(t_2 - t_1)] : [1+3\alpha_1(t_3 - t_1)] = [1+2\alpha_2(t_2 - t_1)] : [1+3\alpha_2(t_3 - t_1)]$$

sau înmulțind mezii între ei și neglijând termenii pătratici (care sunt de ordinul 2 de micime) :

$$1+2\alpha_1(t_2 - t_1) +3\alpha_2(t_3 - t_1) = 1+2\alpha_2(t_2 - t_1) +3\alpha_1(t_3 - t_1) ,$$

$$\alpha_1(2t_2 - 2t_1 - 3t_3 + 3t_1) = \alpha_2(2t_2 - 2t_1 - 3t_3 + 3t_1) ,$$

de unde rezultă obligatoriu $2t_2 - 3t_3 + t_1 = 0$,

$$t_2 = (3t_3 - t_1)/2 = 25^oC \text{ sau } T_2 = (3T_3 - T_1)/2 . \qquad (3)$$

Scriind $t_3 = (t_1 + 2t_2)/3 \rightarrow t_3 \in (t_1 , t_2)$. (4)

5.1.13. ***Din cuarț cristalin se taie un cilindru cu axă paralelă cu axa cristalografică a cuarțului. La temperatura*** $t_1 = 18^oC$ ***raza cilindrului este*** $R = 1{,}0$ cm ***și înălțimea*** $h = 3{,}0$ cm. ***Calculați creșterea de volum a cilindrului dacă este încălzit până la temperatura*** $t_2 = 200^oC$.

Rezolvare. *Cristalele* se dilată *diferit* după *diferite* axe cristalografice. Cuarțul are o axă cristalografică de simetrie după care $\alpha_{\parallel} = 7{,}5 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}. iar după orice direcție transversală $\alpha_{\perp} = 13{,}7 \cdot 10^{-6}$ K^{-1} . Atunci volumul se dilată după legea :

$$V = a\,b\,c = a_o(1+ \alpha_{\parallel}\, t) \cdot b_o(1+ \alpha_{\perp}\, t) \cdot c_o(1+ \alpha_{\perp} t) =$$

$$= V_o\,[1 +(\alpha_{\parallel}+ 2\,\alpha_{\perp})\, t] , \qquad (1)$$

unde am neglijat ca de obicei termenii pătratici și cubici în αt .

$$\Delta V = V_2 - V_1 = V_o\,(\alpha_{\parallel}+ 2\,\alpha_{\perp})\,(t_2 - t_1) = V_o\,(\alpha_{\parallel}+ 2\,\alpha_{\perp})\,\Delta t , \qquad (2)$$

$$\Delta V = \pi R^2 h(\alpha_{\parallel}+ 2\,\alpha_{\perp})\,(t_2 - t_1) = 60 \text{ mm}^3 . \qquad (3)$$

* * **5.1.14.** ***Temperatura unei bare omogene și uniforme variază liniar de la un capăt*** t_1, ***la altul*** t_2. ***Aflați lungimea barei, dacă la*** $0{,}0^oC$ ***lungimea este*** ℓ_o ***și coeficientul de dilatare liniară este*** α.

Rezolvare. $t = t_1 + bx$, dar $t_2 = t_1 + b\,\ell$, de unde

$$b = (t_2 - t_1)/\ell , \quad t = t_1 + (t_2 - t_1)x/\ell \ . \qquad (1)$$

Luăm un *element* de bară de lungime dx situat la distanța x, unde temperatura este t, atunci

$$dx = dx_0(1 + \alpha t) = dx_0\{1 + \alpha[t_1 + (t_2 - t_1)\,x/\ell]\} \ . \qquad (2)$$

Separăm variabilele și integrăm :

$$\int_0^{\ell_0} dx_0 = \int_0^{\ell} \frac{dx}{1 + \alpha[t_1 + (t_2 - t_1)x/\ell]} \ ,$$

ceea ce dă respectiv

$$\ell_0 = \frac{1}{\alpha(t_2 - t_1)/\ell} \ln \frac{1 + \alpha[t_1 + (t_2 - t_1)\ell/\ell]}{1 + \alpha t_1} = \frac{\ell}{\alpha(t_2 - t_1)} \ln \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1} \ ,$$

de unde

$$\ell = \ell_0 \alpha(t_2 - t_1) : \ln[(1 + \alpha t_2)/(1 + \alpha t_1)] \ . \qquad (3)$$

Considerând $\alpha t \ll 1$, putem aproxima logaritmul după for-mula (v. Anexe) :

$$\ln(1 + x) = x - x^2/2 + \ldots \cong x - x^2/2 \ , \ \text{dacă } |x| \ll 1 \ . \qquad (4)$$

$$\ln[(1 + \alpha t_2)/(1 + \alpha t_1)] = \ln(1 + \alpha t_2) - \ln(1 + \alpha t_1) =$$

= ♋$(t_2 - t_1) - (1/2)\,\alpha^2(t_2^2 - t_1^2)$,

trebuie mers până la aproximația de ordinul **2** în αt, căci în aproximația de ordinul ***1*** dilatarea "*dispare*" ! .

$$\ell = \ell_0 \alpha(t_2 - t_1) : \{\ \alpha(t_2 - t_1)[1 - (1/2)\,\alpha(t_2 + t_1)]\} =$$

$$= \ell_0 : [1 - (1/2)\,\alpha(t_2 + t_1)] \approx \ell_0 [1 + (1/2)\,\alpha(t_1 + t_2)] \ , \qquad (5)$$

ca și cum temperatura de încălzire ar fi *medie aritmetică* .

* *

5.2. Dilatarea lichidelor

5.2.1. ***Într-un vas de cuarț de volum*** V = 2,8 L ***este așezat un corp de alamă de masă*** m = 8,5 kg, ***restul vasului fiind umplut cu apă. S-a observat că prin încălzire cu*** Δt = 3,0 K , ***nivelul apei din vas nu s-a schimbat. Aflați coeficientul mediu de dilatare al apei în acest interval de temperatură .***

Rezolvare. Creșterile de volum sunt legate între ele prin relația :

$$\Delta V_{vas} = \Delta V_{alam.} + \Delta V_{ap.} , \quad (1)$$

$$\Delta V_{vas} = 3\alpha_c \, \Delta t \, ; \, \Delta V_{al.} = (m / \rho) \, 3\alpha_{al.} \, \Delta t \, ; \, \Delta V_{ap.} = (V - m / \rho) \, \beta \, \Delta t . \quad (2)$$

Introducând (2) în (1), găsim :

$$\beta = (V \, 3\alpha_c - 3\alpha_{al.} \, m / \rho) : (V - m / \rho) = - 3,1 \cdot 10^{-5} \, K^{-1} . \quad (3)$$

Valoarea *negativă* a coeficientului de dilatare înseamnă că încălzirea a avut loc între 0°C și 4°C când apa se *contractă*, în loc să se dilate (**anomalia** *dilatării apei*).

5.2.2. ***Pentru măsurarea coeficientului de dilatare al sticlei s-a luat un vas din această sticlă, de volum*** V = 200 cm^3, ***s-a umplut până la refuz cu mercur la*** 0°C ***(în gheață care se topește), apoi s-a încălzit până la*** t = 100 °C ***(apa care fierbe). Din vas au curs afară*** ΔV = 3,0 cm^3 ***de mercur. Aflați coeficientul de dilatare liniară al sticlei.***

Rezolvare. Din legea dilatării aparente avem :

$$\Delta V = V\gamma_{ap} \, t = V(\beta - 3\alpha) \, t \, , \quad \alpha = \beta / 3 - \Delta V / (3Vt) = 10 \cdot 10^{-6} \, K^{-1} .$$

5.2.3. ***Pentru determinarea coeficientului de dilatare al alcoolului etilic s-au luat doi cilindri gradați identici și s-au umplut la*** 0°C, ***unul cu apă*** (β = 35 $\cdot$ 10^{-5} K^{-1}) ***de volum*** V = 500 cm^3 ***și celălalt cu alcool etilic de volum*** V ' = 485 cm^3. ***Încălzind în aceeași baie de apă de la*** 0°C ***la*** t = 40°C, ***volumele celor două lichide s-au egalat. Aflați coeficientul de dilatare (absolută) al alcoolului etilic.***

Rezolvare. Legea dilatării aparente dă condiția :

$$V \, [1 + (\beta - 3\alpha) \, t \,] = V ' \, [1 + (\beta ' - 3\alpha) \, t \,] ,$$

$$\beta ' = \beta \, V / V ' + [(V - V ') / (V ' t)] \, (1 - 3\alpha \, t) . \quad (1)$$

Neglijând termenii superiori (pătratici) în coeficienții de dilatare, putem scrie aproximativ: $\beta' \approx \beta + (V - V')/(Vt) = 11 \cdot 10^{-1}\ K^{-1}$. (2)
Într-adevăr, V, V' diferă între ei prin mărimi mici de ordinul *1*, care apar înmulțite cu β sau cu α şi dau mărimi mici de ordinul *2*, neglijabile .

5.2.4. ***Ce înălțime*** h ***trebuie să aibă coloana de mercur dintr-o eprubetă de lungime*** ℓ = 20 cm, ***pentru ca volumul liber al eprubetei de deasupra mercurului să nu varieze cu temperatura ?***

Rezolvare. Punem condiția de egalitate a volumelor de deasupra mercurului la două temperaturi oarecare $t_{1,2}$:

$$S_o\ell_o(1 + 3\alpha t_1) - S_oh_o(1 + \beta t_1) = S_o\ell_o(1 + 3\alpha t_2) - S_oh_o(1 + \beta t_2) \qquad (1)$$

$$\ell_o 3\alpha = h_o\,\beta \quad \text{sau} \quad h = \ell \cdot 3\alpha/\beta = 3{,}0\ \text{cm} \qquad (2)$$

(puteam scrie, mai simplu, egalitatea volumelor la 0°C şi o temperatură oarecare). Condiția evidentă $h < \ell$ poate fi întotdeauna îndeplinită pentru orice sort de sticlă şi orice lichid, deoarece $3\alpha < \beta$, adică *solidele se dilată mai puțin decât lichidele.*

5.2.5. ***Nivelul electrolitului într-un vas de sticlă prismatic de înălțime*** h = 20 cm ***este cu*** Δh = 2,0 mm ***sub orificiul din capac. Încălzind vasul cu*** Δt = 25 K, ***s-a observat că electrolitul începe să curgă. Aflați coeficientul de dilatare al electrolitului.***

Rezolvare. Prin încălzire cu Δt volumul vasului devine egal cu volumul electrolitului : $S\,h(1 + 3\alpha\Delta t) = S(h - \Delta h)(1 + \beta\Delta t)$, (1)

$$\beta = (3\alpha h\Delta t + \Delta h) : [h - \Delta h)\,\Delta t \approx 3\alpha + \Delta h/(h\,\Delta t) = 4{,}3 \cdot 10^{-4}\ K^{-1} , \qquad (2)$$

unde am neglijat la numitor $\Delta h \ll h$.

5.2.6. ***Un vas cilindric este umplut cu un lichid. Cum variază înălțimea coloanei de lichid cu temperatura ? Cu cât la sută*** (f) ***creşte această înălțime în cazul unui vas de sticlă cu mercur, dacă vasul este încălzit cu*** Δt = 65°C ***?***

Rezolvare. $h = V/S = V_o(1 + \beta t) : [S_o(1 + 2\alpha t) \approx$

$$\approx h_o\,[1 + (\beta - 2\alpha)t] , \qquad (1)$$

$$\Delta h = h_o(\beta - 2\alpha)\Delta t , \quad f = \Delta h/h = (\beta - 2\alpha)\Delta t = 1{,}0\ \% . \qquad (2)$$

5.2.7. ***Pentru determinarea coeficientului de dilatare*** β ***al unui lichid se poate folosi un*** **picnometru** ***(flaconaş cu dop, prevăzut cu un capilar pentru scurgerea surplusului de lichid, v. figura). Se cântăreşte picnometrul gol. Se umple până la refuz cu lichidul de studiat, la temperatura*** t_1, ***se cântăreşte***

din nou şi prin diferenţă se află masa** m_1 **a lichidului. Se încălzeşte până la temperatura** t_2 **; atunci o parte din lichid se scurge. Se cântăreşte din nou şi se află masa** m_2 **a lichidului rămas. Cunoscând coeficientul de dilatare liniară** α **al sticlei picnometrului, aflaţi coeficientul de dilatare** β **al lichidului studiat.

Aplicaţie : $t_1 = 0{,}0^oC$, $t_2 = 100^oC$, $m_1 = 100$ g, $m_2 = 95$ g, *lichidul :* glicerina .

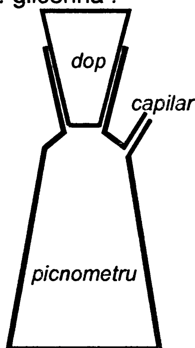


Fig.5.2.7

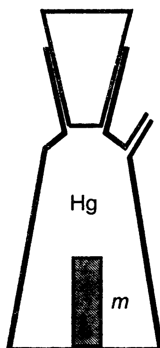


Fig.5.2.10

Rezolvare. Masa de lichid $m = \rho_{lich} V_{vas}$ la temperaturile $t_{1,2}$ este :

$$m_1 = [\rho_o / (1 + \beta t_1)]\, V_o(1 + 3\alpha t_1)\ ,$$

$$m_2 = [\rho_o / (1 + \beta t_2)]\, V_o(1 + 3\alpha t_2)\ , \qquad (1)$$

$$m_2 / m_1 = [(1 + \beta t_1) / (1 + \beta t_2)]\, (1 + 3\alpha t_2) / (1 + 3\alpha t_1) \approx$$

$$\approx [(1 + \beta t_1) / (1 + \beta t_2)]\, [1 + 3\alpha(t_2 - t_1)] \approx$$

$$\approx [1 + \beta t_1 + 3\alpha(t_2 - t_1)] : (1 + \beta t_2)\ , \qquad (2)$$

$$\beta = 3\alpha \cdot m_1(t_2 - t_1) : (m_2 t_2 - m_1 t_1) + (m_1 - m_2) : (m_2 t_2 - m_1 t_1). \qquad (3)$$

Neglijând în (2) termenii *pătratici* în βt obţinem mai simplu :

$$\beta = 3\alpha + (m_1 - m_2) : [m_1(t_2 - t_1)] = 52{,}7 \cdot 10^{-5}\ K^{-1}\ , \qquad (4)$$

unde $t_{1,2}$ nu mai apar separat, ci în diferenţa Δt .

5.2.8. ***Coeficientul de dilatare al mercurului este bine cunoscut:*** $\beta = 18{,}18 \cdot 10^{-5}\ K^{-1} \approx 18 \cdot 10^{-5}\ K^{-1}$ ***(cu o precizie de** 2 ‰**) şi poate fi folosit pentru determinarea coeficientului de dilatare al diverselor sorturi de sticlă . De exemplu, pentru determinarea coeficientului de dilatare liniară** α **al unui sort de sticlă, se umple un balon confecţionat din această sticlă (balon prevăzut cu un capilar pentru scurgerea surplusului de***

mercur , de exemplu, de tipul picnometrului, *v. fig.5.2.7) cu mercur, la două temperaturi* t_1 = 20°C *respectiv* t_2 = 100°C *şi prin cântăriri adecvate (scăzând masa balonului gol) se găseşte masa mercurului introdus,* m_1= 250 g, *respectiv* m_2= 247 g. *Aflaţi coeficientul de dilatare liniară* α *al sticlei .*

Rezolvare. Folosind rezultatele de la problema precedentă, avem $3\alpha = \beta\,(m_2t_2 - m_1t_1) : [m_1(t_2 - t_1)] - (m_1 - m_2) : [m_1(t_2 - t_1)] \approx$

$$\approx \beta - (m_1 - m_2) : [m_1(t_2 - t_1)] \ , \qquad (1)$$

$$\alpha = \beta / 3 - (m_1 - m_2) : [3m_1(t_2 - t_1)] = 10 \cdot 10^{-6}\ K^{-1} \ . \qquad (2)$$

5.2.9. ***Pentru a determina coeficientul de dilatare*** β ***al unui lichid (alcool metilic) s-a procedat astfel. O bilă din material cunoscut (de exemplu, sticlă) cu coeficientul de dilatare liniară*** $\alpha = 9{,}0 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$ ***, se introduce într-un picnometru plin cu lichidul respectiv, la temperaturile*** t_1= 0,0°C, ***respectiv*** t_2=50°C ***şi se cântăreşte masa de lichid dezlocuită*** m_1 = 100 g, ***respectiv*** m_2 = 94 g. ***Aflaţi coeficientul de dilatare*** β ***al lichidului.***

Rezolvare. Masa de lichid dezlocuită $m = \rho_{lich} V_{bil\bullet}$. Analog problemei 5.2.7: $m_1 = [\rho_o / (1 + \beta t_1)]\ V_o(1 + 3\alpha t_1)$,

$$m_2 = [\rho_o / (1 + \beta t_2)]\ V_o(1 + 3\alpha t_2) \ , \qquad (1)$$

$$m_2 / m_1 = [(1 + \beta t_1) / (1 + \beta t_2)]\ [(1 + 3\alpha t_2) / (1 + 3\alpha t_1) \approx$$

$$\approx [(1 + \beta t_1) / (1 + \beta t_2)]\ [1 + 3\alpha(t_2 - t_1)] \ ,$$

$$\approx [1 + \beta t_1 + 3\alpha(t_2 - t_1)] : (1 + \beta t_2) \ , \qquad (2)$$

$$\beta = 3\alpha \cdot m_1(t_2 - t_1) : (m_2t_2 - m_1t_1) + (m_1 - m_2) : (m_2t_2 - m_1t_1) \approx$$

$$\approx 3\alpha + (m_1 - m_2) : [m_1(t_2 - t_1)] = 120 \cdot 10^{-5}\ K^{-1} \ . \qquad (3)$$

5.2.10. ***Pentru determinarea coeficientului de dilatare*** γ ***al unui metal de densitate cunoscută*** ρ ***, s-a luat o masă*** m ***de metal, s-a introdus într-un balon-picnometru (prevăzut cu un capilar pentru scurgere), s-a umplut apoi balonul până la refuz cu mercur la temperaturile cunoscute*** $t_{1,2}$ ***şi s-au măsurat masele de mercur introduse*** m_1, ***respectiv*** m_2 ***(prin cântăriri adecvate). Ştiind densitatea mercurului*** ρ_{Hg} = 13,6 g/cm^3 ***la*** 0°C, ***coeficientul său de dilatare*** $\beta_{Hg} = 18 \cdot 10^{-5}\ K^{-1}$ ***şi coeficientul de dilatare liniară al sticlei*** $\alpha_{st.} = 9 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$ ***, aflaţi coeficientul de dilatare*** γ ***al metalului studiat.***

Aplicație : *alama cu* $\rho = 8{,}4\ g/cm^3$, $m = 84\ g$, $t_1 = 0{,}0°C$, $t_2 = 100°C$, $m_1 = 680\ g$, $m_2 = 669{,}5\ g$.

Rezolvare. Scriem $V_{balon} = V_{metal} + V_{Hg}$ la temperaturile $t_{1,2}$:

$$V_1 = m/\rho_1 + (m_1/\rho_{oHg})(1 + \beta_{Hg}t_1), \quad (1)$$

$$V_1(1 + 3\alpha_{st.}\Delta t) = (m/\rho_1)(1 + \gamma\Delta t) + (m_2/\rho_{oHg})(1 + \beta_{Hg}t_2). \quad (2)$$

Prin eliminarea volumului V_1 al balonului, obținem :

$$\gamma = 3\alpha_{st.}[1 + (m_1/m)(\rho_1/\rho_{oHg}) + \{(m_1 - m_2) : [m(t_2 - t_1)]\}(\rho_1/\rho_{oHg}) -$$

$$- \beta_{Hg}[(m_2t_2 - m_1t_1) : m(t_2 - t_1)(\rho_1/\rho_{oHg}). \quad (3)$$

Neglijând termenii pătratici, în $\alpha\beta$ și β^2, ultimul termen se simplifică și relația se poate scrie mai simplu :

$$\gamma \approx 3\alpha_{st.}[1 + (m_1/m)(\rho/\rho_{Hg}) + \{(m_1 - m_2) : [m(t_2 - t_1)]\}(\rho/\rho_{Hg}) -$$

$$- \beta_{Hg}(m_2/m)(\rho/\rho_{Hg}) = 49 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}. \quad (4)$$

5.2.11. ***Un vas de sticlă conține, la o anumită temperatură, o masă*** $m_1 = 90\ g$ ***de aluminiu (1) și o masă*** $m_2 = 80\ g$ ***petrol (2), astfel încât vasul este* plin. *Aflați masa de petrol care iese afară din vas dacă acesta este încălzit cu*** $\Delta t = 100\ K$.

Rezolvare. Avem la temperatura t_1, respectiv t_2,

$$V_1 = m_1/\rho_1 + m_2/\rho_2; \qquad V_1(1 + 3\alpha\Delta t) =$$

$$= (m_1/\rho_1)(1 + \gamma_1\Delta t) + [(m_2 - \Delta m)/\rho_2](1 + \beta_2t_2) : (1 + \beta_2t_1), \quad (1)$$

de unde, eliminând volumul V_1 și neglijând termenii pătratici, în $\alpha\beta$ și în $\gamma\beta$, obținem :

$$\Delta m \approx [\rho_2\Delta t : (1 + \beta_2t_2)[(m_1/\rho_1)(\gamma_1 - 3\alpha) + (m_2/\rho_2)(\beta_2 - 3\alpha)]. \quad (2)$$

Dacă neglijăm și $\beta_2t_2 \ll 1$ de la numitor, obținem în aproximația *liniară* :

$$\Delta m \approx \rho_2\Delta t[(m_1/\rho_1)(\gamma_1 - 3\alpha) + (m_2/\rho_2)(\beta_2 - 3\alpha)] = 63{,}1\ g, \quad (3)$$

unde în aproximația noastră densitățile $\rho_{1,2}$ pot fi luate la oricare temperatură din intervalul studiat .

5.2.12. ***Pentru măsurarea coeficientului de dilatare absolută*** β ***al unui lichid se poate folosi metoda lui* Dulong *și* Petit. *Un tub în formă de* U *este umplut cu lichidul studiat. Cele două ramuri sunt menținute la temperaturile*** $t_{1,2}$. ***Se măsoară înălțimile*** $h_{1,2}$ ***ale coloanelor de lichid de la nivelul comun (v.fig.). Exprimați coeficientul de dilatare (absolută)*** β ***al lichidului.***

Aplicaţie : *ulei de transformator* , $t_1 = 20^oC$, $t_2 = 70^oC$, $h_1 =$ $= 40$ cm , $h_2 = 41{,}2$ cm.

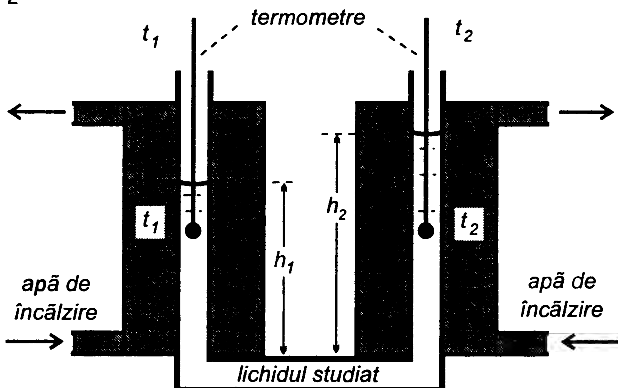


Fig.5.2.12

Rezolvare. Scriem condiţia de egalitate a presiunilor la nivelul comun inferior (în baza *principiului vaselor comunicante* : într-un plan orizontal dus prin acelaşi lichid (deci inclusiv aceeaşi densitate sau temperatură) în vase comunicante presiunea este aceeaşi):

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \quad \text{sau} \quad \rho_o h_1 / (1 + \beta t_1) = \rho_o h_2 / (1 + \beta t_2)\,, \quad (1)$$

$$\beta = (h_2 - h_1) : (h_1 t_2 - h_2 t_1)\,. \quad (2)$$

Neglijând termenii pătratici în βt se poate scrie şi mai simplu :

$$\beta \approx (h_2 - h_1) : [h_1(t_2 - t_1)] = (h_2 - h_1) : (h_1 \Delta t) = 60 \cdot 10^{-5} K^{-1}, \quad (3)$$

unde apare ***diferenţa*** de temperatură Δt.

5.2.13. ***Un balon de sticlă este umplut cu mercur, ca în figură. Volumul mercurului*** $V = 0{,}50$ L , ***înălţimea nivelului*** $h = 10$ cm. ***Secţiunea gâtului cilindric*** $S = 1{,}0$ cm^2. ***Calculaţi creşterea de presiune*** Δp ***pe fundul vasului, dacă sistemul este încălzit cu*** $\Delta t = 40^oC$.

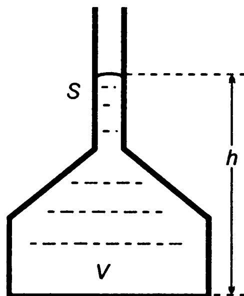


Fig.5.2.13

Rezolvare. $p_1 = \rho_1 g h_1$, $p_2 = \rho_2 g h_2$, (1)

dar $\rho_2 \cong \rho_1(1 - \beta\Delta t)$, $h_2 = h_1 + \Delta V_{ap} / S \approx h_1 + V(\beta - 3\alpha)\, \Delta t / S$, (2)
unde am neglijat termenii pătratici, în $\beta^2 t^2$ şi în $\alpha t \beta t$.

$$p_2 \cong \rho_1(1 - \beta\Delta t)\, g\, [h_1 + V(\beta - 3\alpha)\, \Delta t / S\,] \approx$$
$$\approx \rho_1\, g\, h_1 + \rho_1\, g\, \Delta t\, [\, - h_1\beta + V(\beta - 3\alpha) / S\,] \,, \quad (3)$$
$$\Delta p = p_2 - p_1 \approx \rho\, g\, \Delta t\, [V(\beta - 3\alpha) / S - h\, \beta] = 30 \text{ torr} = 4{,}0 \text{ kPa} \,. \quad (4)$$
Am neglijat iarăşi termenii mici de ordinul *2* de micime.

5.2.14. ***Înălţimea coloanei de mercur într-un barometru are valoarea*** B = 764,8 mm ***la temperatura camerei*** t = 20°C, ***fiind măsurată cu o riglă, care a fost etalonată la*** 0,0°C. ***Considerând câmpul gravitaţional egal, practic, cu cel normal (standard), aflaţi presiunea atmosferică exprimată în torri*** (mm Hg) .

Rezolvare. *Torrul* sau mm Hg este unitatea de presiune egală cu presiunea exercitată de o coloană de mercur înaltă de 1,00 mm, la temperatura de 0,0°C şi in câmp gravitaţional normal $g_n =$ $= 9{,}80665 \text{ m/s}^2$.

Dacă coloana de mercur din barometru se află la 0°C şi câmpul gravitaţional este *normal*, atunci lungimea coloanei măsurată în mm reprezintă chiar presiunea atmosferică exprimată în mm Hg ≡ ≡ torr . Altfel, înălţimea barometrică *B* citită în mm trebuie corectată pentru a da presiunea în mmHg :

$$B_{[mm]}\, \rho g = H_{[torr]}\, \rho_o g_n \,, \; H_{[torr]} = B_{[mm]}\, (\rho / \rho_o)(\, g / g_n) \,. \quad (1)$$

În cazul nostru trebuie făcută corecţia de temperatură atât pentru citirea cu rigla, cât şi pentru temperatura *nestandard* a mercurului. Dacă rigla este gradată la 0°C, atunci citirile sunt mai mici decât în realitate, din cauza dilatării riglei :

$$B_{real} = B_{citit}(1 + \alpha\, t) \,. \quad (2)$$

Densitatea variază cu temperatura după legea $\rho = \rho_o / (1 + \beta\, t)$, (3)

astfel încât : $H_{[torr]} = B_{cit.[mm]}\, [(1 + \alpha\, t) / (1 + \beta\, t)]\, g / g_n \approx$
$$\approx B_{cit.[mm]}\, [1 + (\alpha - \beta) t] = 762{,}3 \text{ torr} \,. \quad (4)$$
Corecţia de temperatură este de ordinul a 2... 3 mm Hg.

5.2.15. ***Un corp care pluteşte pe un lichid este încălzit împreună cu lichidul. Se va cufunda sau se va ridica corpul în timpul încălzirii ?***

Rezolvare. Datorită dilatării corpului volumul dezlocuit şi deci greutatea volumului respectiv de fluid vor creşte cu fracţiunea

$\Delta V_c / V_c = 3\alpha\Delta t$. În acelaşi timp însă, greutatea volumului de lichid dezlocuit va scădea cu fracţiunea $-\Delta\rho_l / \rho_l = \beta\Delta t$, datorită micşorării densităţii lichidului. Cum totdeauna *lichidele se dilată mai mult decât solidele*, $\beta_{lich} > 3\alpha_{solid}$, rezultă că corpul se va *cufunda* pentru a dezlocui un volum mai mare de lichid, necesar plutirii .

5.2.16. ***O bucată de cupru este cufundată în apă. Cu cât la sută creşte forţa arhimedică asupra bucăţii de cupru, dacă sistemul este încălzit cu*** $\Delta t = 50°C$ ***?***

Rezolvare. $F_A = \rho_{ap} \cdot V_{Cu}\, g$, (1)

$$(F_{A2} - F_{A1}) / F_{A1} = (\rho_2 V_2 - \rho_1 V_1) / (\rho_1 V_1) = \rho_2 V_2 / (\rho_1 V_1) - 1 =$$

$$= [(1 + \beta t_1) / (1 + \beta t_2)]\, (1 + 3\alpha t_2) / (1 + 3\alpha t_1) - 1 \approx$$

$$\approx [(1 + \beta t_1) / (1 + \beta t_2)]\, (1 + 3\alpha\Delta t) - 1 \approx$$

$$\approx (3\alpha - \beta)\, \Delta t : (1 + \beta t_2) \approx -(\beta - 3\alpha)\, \Delta t = -2{,}0\ \% , \quad (2)$$

forţa arhimedică *scade*.

5.2.17. ***Pentru a determina coeficientul de dilatare al unui metal (zinc), el este cufundat în toluen de coeficient de dilatare*** β ***cunoscut. Se constată că greutatea sa a scăzut cu*** $F_1 = 1{,}00$ N ***la temperatura*** $t_1 = 20°C$ ***şi cu*** $F_2 = 0{,}95$ N ***la temperatura*** $t_2 = 70°C$. ***Aflaţi coeficientul de dilatare liniară al metalului.***

Rezolvare. Greutatea corpului cufundat scade datorită forţei arhimedice, care la cele două temperaturi este :

$$F_1 = [\rho_o / (1 + \beta t_1)]\, V_o (1 + 3\alpha t_1) g ,$$

$$F_2 = [\rho_o / (1 + \beta t_2)]\, V_o (1 + 3\alpha t_2) g , \quad (1)$$

$$F_2 / F_1 = [(1 + \beta t_1) / (1 + \beta t_2)]\, [(1 + 3\alpha t_2) / (1 + 3\alpha t_1)] \rightarrow$$

$$3\alpha = (1/\Delta t)\, [(F_2 / F_1)\, (1 + \beta t_2) / (1 + \beta t_1) - 1] \approx$$

$$\approx (1/\Delta t)\, [(F_2 / F_1)(1 + \beta\Delta t) - 1] = \beta\, F_2 / F_1 + (F_2 - F_1) / (F_1 \Delta t) \approx$$

$$\approx \beta - (F_1 - F_2) / (F_1 \Delta t) = 70 \cdot 10^{-6}\ K^{-1} , \quad (2)$$

unde am neglijat succesiv termenii pătratici în βt .

5.2.18. ***Pentru determinarea coeficientului de dilatare al unui lichid (acetonă) de densitate cunoscută*** $\rho_\ell = 792$ kg/m^3 ***, s-a luat un corp de plexiglas*** ($\alpha = 10 \cdot 10^{-5}\ K^{-1}$) ***de volum*** $V_c = 100$ cm^3***, s-a cufundat în lichidul studiat şi s-a observat, cu ajutorul unui dinamometru, că greutatea aparentă a variat cu*** $\Delta G = 44{,}0$ mN***, atunci când sistemul a fost încălzit cu*** $\Delta t = 50$ K. ***Aflaţi coeficientul de dilatare absolută al lichidului.***

Rezolvare. Preluăm rezultatele de la problema 5.2.17. Greutatea aparentă variază datorită variației forței arhimedice :

$$\Delta G_{ap.} = - \Delta F_A = F_A (\beta - 3\alpha) \Delta t = \rho_\ell V_c g (\beta - 3\alpha) \Delta t , \quad (1)$$

de unde $\beta = 3\alpha + \Delta G : (\rho_\ell V_c g \Delta t) = 143 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. (2)

5.2.19. ***Pentru determinarea coeficientului de dilatare absolută al unui lichid (benzen) s-a luat un corp de aluminiu de masă*** m = 100 g , ***s-a cufundat în lichidul studiat şi s-a măsurat cu ajutorul unui dinamometru greutatea aparentă a corpului la două temperaturi diferite :*** $P_1 = 0{,}680$ N ***la*** $t_1 = 20$°C ***şi*** $P_2 = 0{,}697$ N ***la*** $t_2 = 70$°C. ***Aflați coeficientul de dilatare absolută*** β ***al lichidului.***

Rezolvare. Greutatea aparentă la temperatura t este

$$P = mg - F_A = mg(1 - \rho_\ell / \rho_c) =$$
$$= mg[1 - (\rho_{o\ell} / \rho_{oc})(1 + 3\alpha t) / (1 + \beta t)] . \quad (1)$$

Scriem greutatea aparentă (1) pentru cele două temperaturi :

$$(mg - P_2) / (mg - P_1) = [(1 + 3\alpha t_2) / (1 + \beta t_2)] (1 + \beta t_1) / (1 + 3\alpha t_1) \approx$$
$$\approx (1 + 3\alpha \Delta t + \beta t_1) / (1 + \beta t_2) \approx 1 - (\beta - 3\alpha)\Delta t , \quad (2)$$
$$\beta = [3\alpha(mg - P_1) \Delta t + P_2 - P_1] : (mg \Delta t + P_1 t_1 - P_2 t_2) \approx$$
$$\approx 3\alpha + (P_2 - P_1) : [(mg - P_1) \Delta t] = 120 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} , \quad (3)$$

unde am neglijat succesiv termenii pătratici, în α^2, $\alpha\beta$, β^2 .

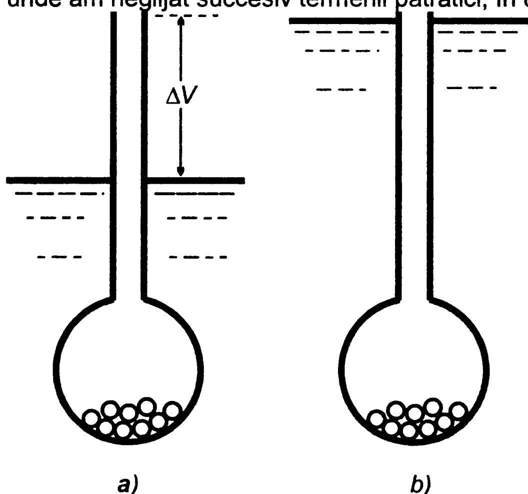


Fig.5.2.20

5.2.20. ***Pentru a măsura coeficientul de dilatare absolută β al unui lichid (terebentină) s-a construit un balon, terminat cu un gât cilindric subțire, dintr-un material cu coeficientul de dilatare liniară α cunoscut (sticlă). Se cunoaşte volumul balonului*** $V = 100\ cm^3$***. Se introduc în balon alice astfel ca el să plutească în lichidul studiat, la o temperatură dată, cu gâtul cilindric în afară, ca în figură. Se măsoară volumul*** $\Delta V = 2{,}7\ cm^3$ ***al porțiunii cilindrice care rămâne afară. Apoi se încălzeşte încet lichidul până când tubul cilindric se cufundă complet. Cunoscând creşterea de temperatură corespunzătoare*** $\Delta t = 30\ K$***, calculați coeficientul de dilatare absolută β al lichidului.***

Rezolvare. Masa balonului trebuie să fie egală cu masa lichidului dezlocuit (condiția de plutire) :

la temperatura t_1 : $m = (V - \Delta V)\rho_0/(1 + \beta t_1)$,

la temperatura t_2 : $m = V(1 + 3\alpha\Delta t)\rho_0/(1 + \beta t_2)$. (1)

Egalând expresiile şi neglijând termenii pătratici în αβ , găsim :

$\beta = 3\alpha + \Delta V/(V\Delta t) = 93 \cdot 10^{-5}\ K^{-1}$. (2)

*

5.3. TERMOMETRIE

5.3.1. ***Calculați volumul*** V_r ***al rezervorului unui termometru, ştiind că în capilar pe porțiunea*** $\Delta t = 100$ grd ***între diviziunile*** 0°C ***şi*** 100°C ***intră o masă*** $m = 2{,}3$ g ***mercur. Lichidul termometric este alcoolul etilic.***

Rezolvare. Volumul unei diviziuni este creşterea *aparentă* de volum a lichidului pentru 1°C, deci $v = V_r(\beta - 3\alpha)$. Pe de altă parte, din enunț $v = (m/\rho)/\Delta t$, de unde

$V_r = v : (\beta - 3\alpha) = m : [\rho(\beta - 3\alpha)\Delta t] = 1{,}6\ cm^3$.

5.3.2. ***La un termometru volumul rezervorului este de*** n = = 6400 ori ***mai mare decât volumul unei diviziuni. În locul lichidului termometric inițial se introduce tetraclorura de carbon. Aflați : a) coeficientul de dilatare absolută*** β ***al lichidului inițial, b) diviziunea*** N ***indicată de noul termometru la temperatura*** t = = 10°C.

Rezolvare. a) Volumul unei diviziuni reprezintă creşterea aparentă de volum a lichidului pentru 1°C, deci $v = V_r(\beta_1 - 3\alpha)$, de unde

$$\beta_1 = 3\alpha + v / V_r = 3\alpha + 1 / n = 18,3 \cdot 10^{-5}\ K^{-1} \text{ (mercur).} \qquad (1)$$

b) $N = \Delta V / v = V_r(\beta_2 - 3\alpha)t : v = n(\beta_2 - 3\alpha)t = 76$ div . (2)

5.3.3. ***Dilatarea apei este* neregulată *şi poate fi descrisă prin ecuația***

$$V = V_0(1 - at + bt^2),\ a = 61,05 \cdot 10^{-6}\ K^{-1},\ b = 7,733 \cdot 10^{-6}\ K^{-2}. \qquad (1)$$

Cum s-ar comporta un termometru umplut cu apă drept lichid termometric (etalonat în mod obişnuit : în imediata vecinătate a lui 0°C ***şi a lui*** 100°C, ***cu scară divizată* uniform) ?**

Exprimați şi reprezentați grafic temperatura ϑ ***indicată de un astfel de termometru în funcție de temperatura reală*** t°C .

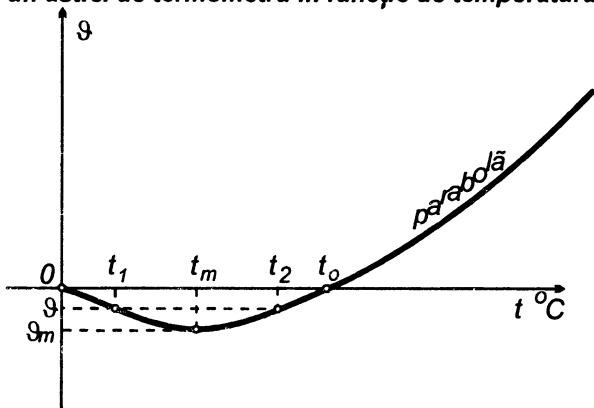


Fig.5.3.3

Rezolvare. Creşterea *aparentă* a volumului apei între punctele de etalonare, 0° şi 100°C, este

$$\Delta V = V - V_0 = V_0 t(bt - a - 3\alpha) = 100\ V_0(100\ b - a - 3\alpha)\ , \qquad (1)$$

unde α este coeficientul de dilatare liniară al sticlei termometrului.

Împărțind (1) la intervalul de etalonare 100, obținem volumul unei diviziuni : $v = V_0(100\,b - a - 3\alpha)$. (2)

Temperatura ϑ indicată de termometru este raportul dintre creşterea aparentă de volum şi volumul unei diviziuni de etalonare:

$$\vartheta = \Delta V / v = V_0 t(bt - a - 3\alpha) : [V_0(100\,b - a - 3\alpha)] =$$
$$= t \cdot (bt - a - 3\alpha) : (100\,b - a - 3\alpha) . \qquad (3)$$

Funcția *nu este liniară*, ci *parabolică* (pătratică)(v. figura).

Termometrul arată $0^o\vartheta$ de două ori : o dată la 0°C şi a doua oară la $t_0 = (a + 3\alpha) / b \approx 11{,}4^oC$. (4)

Între aceste două temperaturi (0 , t_0) termometrul arată o *aceeaşi* temperatură *negativă* de *două* ori, pentru două temperaturi reale $t_{1,2}$ aşezate simetric față de temperatura

$$t_m = (a + 3\alpha) / (2b) = t_0 / 2 = 5{,}7^oC , \qquad (5)$$

când termometrul arată o temperatură negativă minimă (minimul parabolei), şi anume :

$$\vartheta_{min} = - (a + 3\alpha)^2 : [4b(100\,b - a - 3\alpha)] = - 0{,}37^o\vartheta , \qquad (6)$$
$$(t_1 + t_2 = 2t_m = t_0) .$$

Minimul parabolei (t_m = 5,7°C) este deplasat față de maximul densității apei (4°C) din cauza dilatării *vasului* de sticlă.

* * **5.3.4.** ***Dilatarea apei este neregulată, coeficientul de dilatare depinde de temperatură astfel :*** $\beta = dV / (V_0 dT) = At - B$, ***unde*** $A = 15{,}466 \cdot 10^{-6}\,K^{-2}$, $B = 61{,}05 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}$.

Calculați de câte ori creşte volumul apei prin încălzire de la 0°C **la** 100°C .

Rezolvare. Din definiția coeficientului de dilatare din enunț avem : $dV = \beta V_0\, dt$,

$$\int dV = V - V_0 = \int_0^t \beta V_0 dt = V_0 \int_0^t (At - B) dt = V_0\left(\frac{1}{2}At^2 - Bt\right),$$

de unde $V = V_0[1 - Bt + (1/2)At^2]$, (1)

$$V / V_0 = 1 - Bt + (1/2)At^2 , \qquad (2)$$

Pentru t = 100°C avem $V_{100} / V_0 \approx 1{,}07$, (3)

deci volumul creşte cu ≈ 7 % .

* * *

6. VAPORI. HIGROMETRIE

6.1. Vapori saturanţi şi nesaturanţi

6.1.1. ***Vaporii nesaturanţi aflaţi într-un cilindru sunt încălziţi izocor, apoi comprimaţi izoterm până la lichefierea totală. Reprezentaţi grafic procesul în diagrama*** p - V .

Rezolvare. Ţinând seama de *izotermele reale* ***Andrews***, avem graficul din figură.

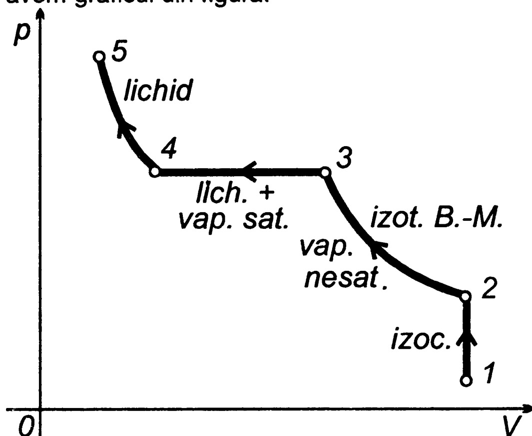


Fig.6.1.1

6.1.2. ***De câte ori distanţa medie dintre molecule este mai mare la vaporii de apă, decât la apa lichidă, la temperatura*** 0°C ***?***

Rezolvare. Într-*un mol* de substanţă sunt N_A molecule. Împărţind *volumul molar* (volumul unui mol) la N_A obţinem volumul care revine (în medie) unei molecule. Latura cubului corespunzător acestui volum este chiar distanţa (medie) dintre molecule :

$$d = \sqrt[3]{V_\mu / N_A} \ .$$

Volumul molar **al gazelor** ***ideale*** **în condiţii** ***normale*** **de presiune şi temperatură este o** ***constantă*** **fundamentală** $V_{\mu o}$ = 22,41 L/mol.

În cazul nostru avem vapori de apă saturanți, la 0°C, dar la presiunea $p_v = 611$ Pa (din *Tabelele* de la *Anexe*). Aplicând vaporilor *ecuația de stare* pentru un mol, obținem volumul molar căutat :

$$p_v V_{\mu v} = RT \rightarrow V_{\mu v} = RT / p_v = 3{,}7 \text{ m}^3/\text{mol} \quad (2)$$

sau altfel, $$V_{\mu v} = V_{\mu o} (p_o / p_v) (T / T_o) . \quad (3)$$

Să calculăm acum volumul **molar** al apei **lichide** :

$$V_{\mu\, apă} = \mu_{apă} / \rho_{apă} = 18 \text{ (g/mol)} : (1{,}0 \text{ g/cm}^3) = 18 \text{ cm}^3/\text{mol} . \quad (4)$$

Raportul cerut : $$\sqrt[3]{\frac{V_{\mu v} / N_A}{V_{\mu\, apa} / N_A}} = \sqrt[3]{\frac{V_{\mu v}}{V_{\mu\, apa}}} = 60 . \quad (5)$$

6.1.3. ***Sub clopotul unei maşini pneumatice s-a pus un pahar cu apă conținând*** m = 180 g ***apă . Se face vid cu ajutorul unei pompe care are debitul*** D = 50 L/min ***. Temperatura instalației este menținută tot timpul*** t = 3,0°C ***. În cât timp se vaporizează toată apa ?***

Rezolvare. Sub clopot avem vapori ***saturanți*** cu densitatea ρ_s = 6,0 g/cm³ (v. *Tabelele* de la *Anexe*). În unitatea de timp se evacuează masa de vapori $D\rho_s$, deci $t = m : (D\rho_s) = 10$ h .

6.1.4. ***Într-un cilindru vertical se află un mol de apă închis cu un capac de greutate neglijabilă, care se mişcă etanş fără frecări. Temperatura apei*** $t_f = 100$°C ***şi presiunea atmosferică este normală . a) Calculați lucrul mecanic de vaporizare la trecerea apei în vapori. b) Care a fost energia de legătură dintre moleculele apei ? c) Calculați energia cinetică medie a moleculelor în stare de vapori .***

Rezolvare. a) Vaporizarea se face *izobar* (şi izoterm), deci lucrul mecanic se face împotriva forței de presiune atmosferică p_o :

$$L = p_o(V_v - V_\ell) = \nu RT_f - p_o V_\ell = \nu RT_f - p_o \nu\mu / \rho = \quad (1)$$

$$= 3{,}1 \text{ kJ} - 1{,}8 \text{ kJ} = 1{,}3 \text{ kJ}.$$

b) Căldura latentă (specifică) de vaporizare $\lambda = 2{,}26$ MJ/kg ,

deci $$Q_v = \nu\mu\lambda = 40{,}1 \text{ kJ} . \quad (2)$$

Diferența dintre această căldură de vaporizare şi lucrul mecanic (1) reprezintă energia de *legătură* a moleculelor :

$$W_{leg.} = Q_v - L = 38{,}8 \text{ kJ} . \quad (3)$$

c) Ținând seama că moleculele de apă au 3 + 3 = 6 gade de libertate (3 translație + 3 rotație), (vibrațiile atomilor sunt neglijabile la temperatura t_f), avem $\varepsilon_c = 6 \cdot (1/2)kT = 15{,}4 \cdot 10^{-21}$ J , (4)

$$E_c = N\, \varepsilon_c = \nu N_A\, \varepsilon_c = 9{,}27 \text{ kJ} . \quad (5)$$

6.1.5. ***Se face experiența lui*** **Torricelli** ***cu un tub de lungime*** h = 1,00 m ***cu*** **apă** ***în loc de mercur. La ce temperatură apare sus un gol de vapori, adică se desprinde apa de capătul superior? Presiunea atmosferică este*** **normală.**

Rezolvare. Presiunea de la baza coloanei de apă, egală cu presiunea atmosferică H (conform *principiului vaselor comunicante*), echilibrează presiunea hidrostatică a coloanei de apă **plus** presiunea vaporilor *saturanți* de deasupra. La limită, în momentul desprinderii : $H = \rho gh + p_s$, $p_s = H - \rho gh = 91{,}52$ kPa ,

ceea ce corespunde (v. *Tabele* de la *Anexe*) temperaturii $t = 97^oC$!!

6.1.6. ***La ce înălțime poate fi pompată apa cu ajutorul unei pompe de aspirație, dacă temperatura apei este: a)*** $t_1 = 20^oC$ ***, b)*** $t_2 = 70^oC$, ***c)*** $t_f = 100^oC$. ***Presiunea atmosferică este normală.***

Rezolvare. Presiunea atmosferică de la baza coloanei de apă echilibrează presiunea hidrostatică a coloanei de apă **plus** presiunea vaporilor *saturanți* de deasupra, care se formează în camera pompei de aspirație: $H = \rho gh + p_s$, $h = (H - p_s)/(\rho g)$. (1)

Luăm din *Tabele* (v. *Anexe*) presiunea vaporilor saturanți la temperaturile din enunț : $h = (H - p_s)/(\rho g) = 10{,}1$ m; 7,1 m; 0 m . (2)

6.1.7. ***Într-un cilindru vertical sub un piston se află un strat de apă de grosime*** h = 1,0 mm. ***Cu cât, x, trebuie deplasat pistonul pentru ca apa să se transforme în vapori? Temperatura se menține constantă*** t = 92°C.

Rezolvare. Volumul creat sub piston va fi ocupat de vaporii *saturanți* proveniți din vaporizarea apei. Scriem *ecuația de **stare*** pentru vapori (observăm că pentru vaporii ***nesaturanți*** se pot aplica, cu o aproximație relativ satisfăcătoare, legile gazelor ideale, în schimb pentru vapori **saturanți *nu*** se pot aplica ecuațiile de *transformare* de la gazele ideale, ci numai ***ecuația de stare*** sau ***ecuația densității***, cu o anumită aproximație) :

$p_s(x + h)S = (\rho SH/\mu)RT \rightarrow x = h \cdot \rho RT/(\mu p_s) - h = 2{,}22$ m ,

($p_s = 75{,}6$ kPa) .

6.1.8. ***Într-un cilindru vertical de secțiune*** $S = 98\ cm^2$ ***, cu piston de masă*** m = 133,3 kg ***(care se poate mişca etanş fără frecări), se află imediat sub piston*** $m_a = 1{,}00$ g ***apă. Presiunea atmosferică este*** **normală.** ***a) La ce temperatură pistonul se desprinde de apă? b) La ce înălțime se ridică pistonul la temperatura*** t = 147°C ***?***

Rezolvare. a) Presiunea sub piston este

$$p = H + mg / S = 234{,}6 \text{ kPa} . \qquad (1)$$

Aceasta trebuie să fie presiunea vaporilor saturanți, altfel ei se condensează la loc şi pistonul nu se va desprinde de apă. După *Tabele* această presiune corespunde temperaturii t_s = 126°C .

b) Deoarece temperatura t = 147°C > 126°C, înseamnă că toată apa se vaporizează şi atunci **ecuaţia de stare** dă

$$phS = (m / \mu)RT , \quad h = (m / \mu)RT : (HS + mg) = 8{,}4 \text{ cm} . \qquad (2)$$

6.1.9. ***Un vas închis conține puțină apă, temperatura fiind*** t = 27°C ***şi presiunea în vas egală cu presiunea atmosferică*** p = 101,56 kPa. ***Care va fi presiunea din vas dacă îl introducem in azot lichid ?***

Rezolvare. În vas vom avea aer şi vapori *saturanți* ai apei. La temperatura t = 27°C presiunea vaporilor saturanți ai apei p_s = = 3,56 kPa. Prin răcire *izocoră* presiunea uni gaz (ideal) scade mai încet (*liniar*, după *legea* **Charles**) decât presiunea vaporilor saturanți respectivi (*exponențial*). De aceea prin răcire izocoră vaporii de apă rămân tot timpul saturanți şi se condensează, până apa îngheață şi vom avea final vapori saturanți deasupra gheții (de exemplu, la 0°C : p_s = 611 Pa, la t = - 75°C ; p_s = 0,080 Pa). La temperatura azotului lichid t = - 196°C presiunea vaporilor saturanți ai apei, deasupra gheții, este neglijabilă .

Deoarece la temperatura de fierbere a azotului presiunea vaporilor săi *saturanți* este p_o = 1 atm, iar ai oxigenului p_s = 20,7 kPa, care sunt mai *mari* decât presiunea parțială a azotului, respectiv oxigenului, răciți izocor, aerul din vas nu intră în starea de vapori saturanți şi nu se condensează. Prin urmare, în vas rămâne, practic, presiunea parțială a aerului răcit **izocor** :

$$p' = (p - p_s) \cdot T' / T \approx 25{,}15 \text{ kPa}.$$

6.10. ***Într-un vas închis de volum*** V = 10 L, ***conținând aer uscat la presiunea* normală *şi temperatura*** t = 17°C, ***se introduce*** m = 1,0 g ***apă şi se încălzeşte vasul până la temperatura*** t_1 = 50°C ***şi în continuare până la*** t_2 = 100°C. ***Aflați presiunea din vas la cele două temperaturi.***

Rezolvare. Masa vaporilor *saturanți* care încap în volumul V este (luăm densitățile din Tabele) :

$$m_{s1} = \rho_{s1} V = 0{,}83 \text{ g} < m = 1{,}0 \text{ g} , \qquad (1)$$

$$m_{s2} = \rho_{s2} V = 6{,}0 \text{ g} > m = 1{,}0 \text{ g} . \qquad (2)$$

Aceasta înseamnă că la temperatura t_1 nu se evaporă toată apa introdusă şi atunci presiunea din vas se compune din suma presiunilor parţiale: a vaporilor p_{s1} (din Tabel) şi a aerului încălzit izocor:

$$p_1 = p_{s1} + H \cdot T_1 / T = 125{,}3 \text{ kPa} . \quad (2)$$

La temperatura t_2 toată apa se vaporizează, vaporii vor fi ***ne****saturanţi* şi avem :

$$p_2 = (m / \mu)RT / V + H \cdot T_2 / T = 147{,}46 \text{ kPa} . \quad (4)$$

6.1.11. ***Într-un vas de volum*** V = 22,4 L***, în condiţii normale de presiune şi temperatură, se introduc*** m = 18,0 g ***apă. Apoi vasul este închis ermetic şi încălzit până la*** t = 100°C ***. Care va fi presiunea din vas ?***

Rezolvare. Calculăm câtă masă de vapori *saturanţi* la temperatura t încap în volumul vasului V. (Luăm $\rho_s = 0{,}60$ kg/m^3 din Tabel sau o calculăm: $\mu p_s / (RT)$, unde $p_s = p_o$, deoarece $t = 100$°C):

$$m_s = \rho_s V = 13{,}44 \text{ g} < m = 18{,}0 \text{ g} . \quad (1)$$

Aceasta înseamnă că se vor vaporiza $m_s = 13{,}44$ g apă, iar restul de 4,56 g rămân în stare lichidă. Presiunea din vas se compune din presiunea vaporilor saturanţi $p_s = p_o = 101{,}325$ kPa (presiunea normală) şi din presiunea aerului încălzit izocor :

$$p = p_s + p_o \cdot T / T_o = 2{,}3 \text{ atm} . \quad (2)$$

6.1.12. ***Într-un vas de volum*** V = 1,00 L ***se află vapori de apă la presiunea*** $p_v = 8{,}31$ kPa ***şi temperatura*** $t_1 = 123$°C ***. Ce masă de rouă se depune pe pereţii vasului dacă îl răcim până la*** $t_2 = 20$°C ?

Rezolvare. La temperatura t_2 masa vaporilor saturanţi din vas este (luăm $\rho_{s2} = 17{,}3$ g/m^3 din *Tabel*): $m_s = \rho_{s2} V = 17{,}3$ mg . (1)

Masa totală de apă dată de vaporii p_v este

$$m_v = [\, \mu p_v / (RT)] \cdot V = 45{,}0 \text{ mg} . \quad (2)$$

Prin urmare, prin răcirea acestei mase de vapori se produce sigur *condensarea* unei părţi şi anume : $m_v - m_s = 27{,}7$ mg . (3)

6.1.13. ***Într-un vas închis se află apă în echilibru termic cu vaporii săi la temperatura*** $t_1 = 27$°C ***şi presiunea din vas este*** $p_1 = 100$ kPa. ***Apa ocupă o fracţiune*** f = 0,10 = 10 % ***din volumul vasului. Aflaţi presiunea din vas la temperatura*** $t_2 =$ = 387°C .

Rezolvare. Temperatura *critică* a apei $t_c = 374^oC < t_2 =$ $= 387^oC$, prin urmare sigur toată apa se vaporizează. Atunci presiunea finală se compune din presiunea p_1 adusă la întregul volum şi la temperatura t_2 plus presiunea rezultată din vaporizarea întregii mase de apă : $p = p_1 \cdot [V(1 - f) / V]\, T_2 / T_1 + (\rho f V / \mu)\, RT_2 / V =$

$= p_1(1 - f)\, T_2 / T_1 + (f \rho / m)\, RT_2 = 303$ atm .

6.1.14. ***Într-un vas de volum*** $V = 1{,}00\ m^3$ ***se află un amestec de aer şi vapori de eter etilic*** (C_2H_5-O-C_2H_5) ***la temperatura*** $t = 30^oC$ ***şi presiunea*** $p = 120$ kPa. ***Aflaţi masa eterului şi masa aerului din vas, ştiind că prin răcire, condensarea eterului a început la*** 0^oC . ***Presiunea vaporilor saturanţi ai eterului la*** 0^oC ***este*** $p_{so} = 24{,}66$ kPa .

Rezolvare. La temperatura 0^oC vaporii de eter devin *saturanţi* şi au presiunea p_{so} , deci masa lor este :

$m_e = \mu_e p_{so} V / (RTo) = 0{,}805$ kg . (1) Acum scriem *ecuaţia de stare* pentru amestecul iniţial, în condiţiile iniţiale din enunţ : $pV = (m_a / \mu_a + m_e / \mu_e)RT$, (2) de unde rezultă $m_a = \mu_a[pV / (RT) - m_e / \mu_e] = 1{,}08$ kg . (3)

6.1.15. ***Într-o eprubetă a fost cules, sub apă, hidrogen (experienţa cu*** voltametru***). Volumul hidrogenului*** $V = 29{,}6\ cm^3$, ***înălţimea coloanei de apă din eprubetă*** $h = 13{,}6$ cm, ***temperatura*** $t = 23^oC$, ***presiunea atmosferică normală. a) Aflaţi masa de hidrogen. b) Ce eroare am comite dacă am neglija prezenţa vaporilor de apă ?***

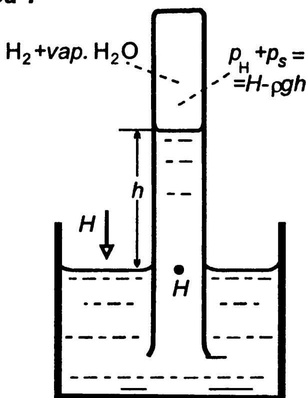


Fig.6.1.15

Rezolvare. a) Hidrogenul cules în eprubetă (*voltametru*) este în amestec cu vaporii saturanți ai apei la temperatura t (p_s = 2,81 kPa din *Tabel*). Presiunea atmosferică H echilibrează presiunea hidrostatică a coloanei de apă plus presiunea amestecului de hidrogen şi vapori saturanți ai apei :

$$H = \rho gh + p_H + p_s\,,\quad p_H = H - \rho gh - p_s = 97{,}2\ \text{kPa}\,; \qquad (1)$$

$$m_H = \mu p_H V/(RT) = 2{,}34\ \text{mg}\,. \qquad (2)$$

b) În acest caz, $H = \rho gh + p_H'$. $p_H' = H - \rho gh$,

$$m_H' = \mu p_H' V/(RT) = m_H \cdot (H - \rho gh)/p_H = 2{,}4\ \text{mg}\,, \qquad (3)$$

$$\varepsilon = (m' - m)/m = (p_H' - p_H)/p_H = p_s/p_H = 3\ \%\,. \qquad (4)$$

6.1.16. ***Un tub suficient de lung, închis la un capăt, este cufundat vertical in apă astfel încât rămâne afară o lungime*** ℓ = 2,00 m ***şi la*** 0°C ***înălțimea coloanei de apă din tub este*** h = 1,00 m***, ca în figură. Presiunea atmosferică este normală. Care va fi înălțimea coloanei de apă la temperatura*** t = 100°C ***?***

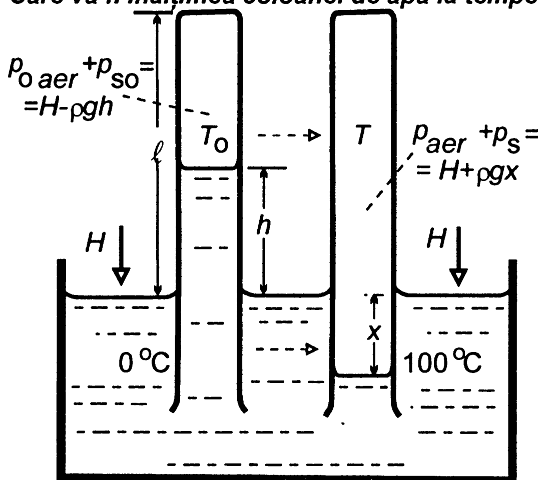


Fig.6.1.16

Rezolvare. La temperatura t = 100°C presiunea vaporilor saturanți ai apei este presiunea *normală* (amintim: apa fierbe la 100°C la presiunea atmosferică *normală*, care este deci presiunea vaporilor săi *saturanți* la această temperatură), deci va egala presiunea atmosferică $p_s = H$ = 101,325 kPa. Dar la presiunea p_s a vaporilor din tub se mai adaugă presiunea *parțială* a aerului din tub, deci coloana de apă va coborî sigur sub nivelul apei din vas.

La 0°C presiunea vaporilor *saturanți* ai apei este (din *Tabel*) p_{so} = 611 Pa, deci putem afla presiunea parțială inițială a aerului din tub : $H = p_{o\,aer} + p_{so} + \rho gh \rightarrow p_{o\,aer} = H - \rho gh - p_{so}$. (1)

În starea *finală* avem $H + \rho gx = p_{aer} + p_s \rightarrow$

$$p_{aer} = H + \rho gx - p_s = \rho gx\,, \quad (p_s = H\ !)\,. \qquad (2)$$

Scriem ecuația *transformării generale* a masei de aer din tub :

$$(H - \rho gh - p_{so})(\ell - h) : T_o = (H + \rho gx - p_s) : T\,, \qquad (3)$$

unde $p_s = H$ şi p_{so} = 611 Pa .

Rezultă o ecuație de gradul 2 în x :

$$x^2 + x\ell - [(p_s - p_{so}) / (\rho g) - h]\,)\ell - h)\,T / T_o = 0 \qquad (4)$$

sau $x^2 + 2x - 12{,}66 = 0$ (5)

cu soluția acceptabilă $x = 2{,}7$ m .

6.1.17. ***Într-un cilindru cu piston se află o masă*** m = 10,0 g ***de azot şi de vapori saturanți ai apei, care ocupă un volum*** V = 10,0 L ***la temperatura*** t = 27°C. ***a) Ce presiune are amestecul ? b) Care va fi presiunea amestecului dacă micşorăm izoterm volumul de*** n = 3,0 ori ***?***

Rezolvare. a) Masa vaporilor saturanți de apă :

$$m_s = \rho_s V = 0{,}258\text{ g}\,, \quad \rho_s = 25{,}8\text{ g/m}^3 \text{ (din } Tabel) \,. \qquad (1)$$

Presiunea amestecului se compune din presiunea vaporilor saturanți p_s = 3,56 kPa (din *Tabel*) plus presiunea *parțială* a azotului a cărui masă este $m - m_s$:

$$p = p_s + (m - m_s)\,RT / (\mu_{N_2} V) = 90{,}22\text{ kPa}\,. \qquad (2)$$

b) Prin comprimarea *izotermă* o parte din vaporii saturanți se condensează. Neglijând volumul apei obținute față de volumul vasului, putem sccrie pentru presiunea amestecului :

$$p' = p_s + n(p - p_s) = 2{,}6\text{ atm}\,, \qquad (3)$$

unde presiunea *parțială* a azotului a crescut de n ori prin comprimarea *izotermă* a volumului de n ori.

6.1.18. ***Un tub de lungime*** ℓ = 1,00 m ***conține aer şi vapori saturanți ai apei şi se atinge cu gura de suprafața apei, ca în figură. Cufundând tubul cu*** $\ell / 2$***, apa intră în tub la înălțimea*** h = 10 cm. ***Presiunea atmosferică este*** H = 101,28 kPa. ***Aflați presiunea vaporilor saturanți la temperatura la care s-a făcut experiența.***

Rezolvare. În eprubetă avem aer cu vapori saturanți, închişi

inițial la presiunea atmosferică. În starea finală presiunea amestecului este $H + \rho g(\ell/2 - h) = p' + p_s$. (1)

Aerul închis în tub suferă o comprimare *izotermă* :

$(H - p_s)\,\ell = p'(\ell - h) = [H + \rho g(\ell/2 - h) - p_s]\,(\ell - h)$,(2) de

unde $p_s = H - \rho g(\ell/2 - h)(\ell/h - 1) = 66{,}0$ kPa , (3) ceea ce corespunde temperaturii $t = 89^oC$.

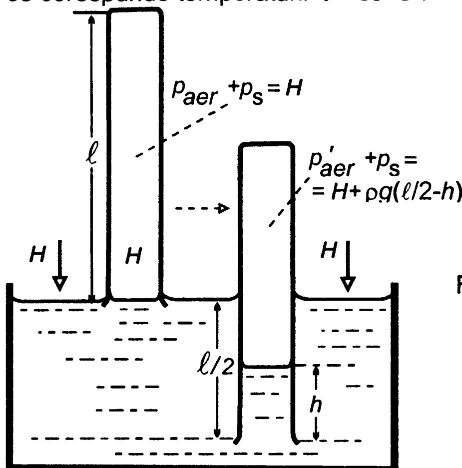


Fig.6.1.18

6.1.19. ***Într-un cilindru vertical de secțiune*** S = 1,00 dm^2***, sub un piston de masă*** m_1 = 0,40 kg***, se află*** m = 1,80 g ***vapori de apă la temperatura*** t_1 = 87^{o}C***, presiunea atmosferică fiind*** H = 99,32 kPa. ***De piston este prins, prin intermediul unor scripeți, un corp de masă*** m_2 = 67 kg***, ca în figură. Sistemul este în echilibru. a) Aflați înălțimea inițială la care se află pistonul. b) Sistemul este răcit. Aflați temperatura*** t_2 ***la care începe condensarea vaporilor şi înălțimea*** h_2 ***a pistonului în acel moment. c) Înălțimea pistonului la temperatura*** t_3 = 20^{o}C.

Rezolvare. a) Presiunea vaporilor sub piston :

$$p_v = H + (m_1 g - m_2 g)/S = 34 \text{ kPa} , \quad (1)$$

ceea ce corespunde temperaturii $t_2 = 72^oC < t_1$, prin urmare vaporii **nu** sunt saturanți (fapt care rezultă şi din punctul b) de la enunț). Din *ecuația de stare* rezultă :

$$p_v S h_1 = (m/\mu)RT_1/p, \quad h_1 = (m/\mu)RT_1/(pS) = 88 \text{ cm} . \quad (2)$$

b) Răcirea este *izobară*, la presiunea (1). La temperatura t_2 = = 72°C de mai sus, vaporii devin *saturanți* şi începe condensarea lor. În acest moment, din legea transformării *izobare* avem :

$$h_2 = h_1 \cdot T_2 / T_1 = 84 \text{ cm} . \qquad (3)$$

c) La temperatura t_3 vaporii sunt condensați şi stratul de apă are înălțimea $h_3 = m : (\rho S) < 0{,}2$ mm . (4)

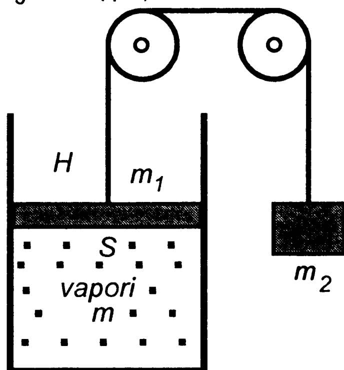


Fig.6.1.19

6.1.20. ***Într-un cilindru sub un piston se află la temperatura*** t = 87°C ***vapori saturanți ai apei. Ce lucru mecanic efectuăm dacă împingem încet pistonul, menținând temperatura constantă şi ştiind că s-a degajat o cantitate de căldură*** Q = = 2,257 kJ ***?***

Rezolvare. Se produce condensarea vaporilor la temperatură şi presiune constante. Prin aceasta se degajă căldura *latentă* Q, deci masa vaporilor saturanți : $m_v = Q : \lambda$. (1)

Pe de altă parte, aceşti vapori ocupau un volum ΔV :

$$p_s \Delta V = (m_v / \mu) RT = [Q / (\mu\lambda)] RT . \qquad (2)$$

În sfârşit, lucrul mecanic *izobar* efectuat:

$$L = p_s \Delta V = [Q / (\mu\lambda)] RT = 166 \text{ J} . \qquad (3)$$

6.1.21. ***Într-un lac este cufundată o țeavă deschisă la capete, în care se află un piston de masă neglijabilă, de arie transversală*** S = 100 cm² ***, tangent la suprafața apei, care se poate deplasa etanş fără frecări. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a ridica încet pistonul până la înălțimea*** h = 15 m ***? Presiunea atmosferică*** H = 100kPa ***şi temperatura*** t = 15°C***. Reprezentați forța care trebuie aplicată pistonului în funcție de înălțimea sa y .***

Rezolvare. Cum începem să ridicăm pistonul, sub el urcă şi o coloană de apă împinsă de presiunea atmosferică :

$$H = (H - F/S) + \rho g y \rightarrow F = \rho g y S . \qquad (1)$$

Aceasta se întâmplă până în momentul când presiunea imediat sub piston devine egală cu presiunea vaporilor *saturanţi* la temperatura t = 15°C (p_s = 1,7 kPa), când coloana de lichid se desprinde de piston şi rămâne fixă. De aici încolo :

$$H = p_s + \rho g h_o , \quad F_o = (H - p_s)\, S , \qquad (2)$$

$$h_o = (H - p_s)/(\rho g) = 10{,}0 \text{ m} < h , \quad F_o = (H - p_s)\, S = 9{,}83 \text{ kN} . \qquad (3)$$

Lucrul mecanic cerut (***aria*** de sub graficul forţei) :

$$W = (1/2)\, h_o F_o + (h - h_o)\, F_o = F_o\, (h - h_o/2) =$$
$$= (H - p_s)\, S\, [h - (H - p_s)/(2\rho g)] = 10 \text{ kJ} . \qquad (4)$$

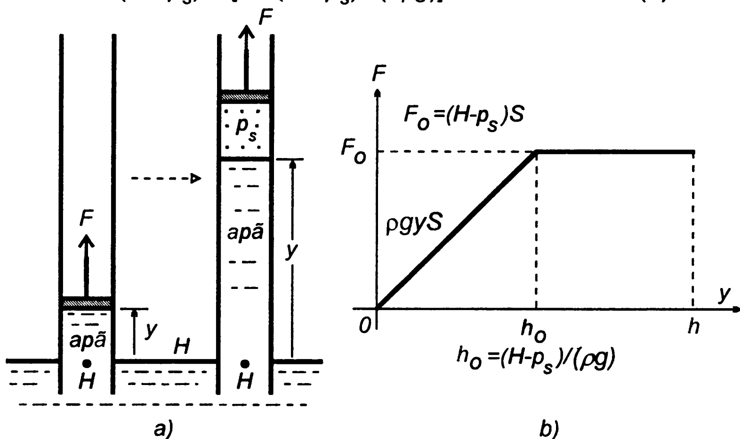


Fig.6.1.21

6.1.22. *Într-un vas închis de volum* V = 33,6 L ***se află aer şi apă. La temperatura*** t = 100°C ***presiunea din vas este*** p = 200 kPa. ***Aflaţi cantitatea de aer dacă cantitatea de apă este :***
a) ν = 1,00 mol, ***b)*** ν = 2,00 mol.

Rezolvare. Să calculăm presiunea vaporilor de apă, dacă toată apa s-ar vaporiza :

$p_V = \nu RT/V$ = 92,25 kPa, respectiv 184,5 kPa . (1) Ţinând seama că la temperatura dată t = 100°C presiunea vapo- rilor saturanţi este p_s = 1,00 atm = 101,3 kPa, rezultă că pentru ν =1,0 mol de apă, toată apa se va vaporiza, iar pentru ν = 2,0 mol

de apă, se va vaporiza o parte din apă, care va avea presiunea parțială p_s, iar restul de apă va fi lichid, de volum neglijabil față de volumul vasului (1 mol de apă are volumul 18 cm^3 « V = 33,6 L).

Numărul de moli de aer se obține din *ecuația de stare* :

a) $\nu_{aer} + \nu_v = pV/(RT)$, $\nu_{aer} = (p - p_v)V/(RT) =$

$= pV/(RT) - \nu = 1,17$ mol. (2)

b) $\nu' = (p - p_s)\, V/(RT) = 1,07$ mol , (3) se vaporizează doar $\nu_v = p_s V/(RT) = \nu \cdot p_s / p_v = 1,10$ mol apă.

6.1.23. ***Într-un balon de volum*** V = 10 L ***se află*** ν_1 = 1,00 mol H_2 ***şi*** ν_2 = 1,00 mol O_2 ***la temperatura*** t_1 = 0°C***. De câte ori creşte presiunea după terminarea reacției de formare a apei, dacă temperatura finală devine*** t_2 = 100°C ***?***

Rezolvare. Aflăm presiunea inițială din *ecuația de stare* :

$p_1 = (\nu_1 + \nu_2)\, RT_1 / V = 450$ kPa . (1)

Reacția de formare a apei : $H_2 + (1/2)\, O_2 = H_2O$. (2)

Prin urmare din cantitățile date de reactanți se formează $\nu_{apă}$ = 1 mol apă şi rămâne ν_{O_2} = 1/2 mol O_2 .

Dacă toată apa formată s-ar vaporiza la temperatura t_2 = = 100°C am avea presiunea vaporilor

$p_v = \nu_{apă}\, RT_2 / V = 300$ kPa $> p_s = 101,3$ kPa . (3)

Prin urmare, o *parte* din apa formată rămâne lichidă şi presiunea amestecului se compune din presiunea vaporilor *saturanți* p_s plus presiunea oxigenului : $p_2 = p_s + \nu_{O_2} RT_2 / V = 251$ kPa . (4)

Raportul de creştere a presiunii : $p_2 / p_1 = 0,55$, (5)

fiindcă creşterea de temperatură $T_2 / T_1 = 1,37$ nu compensează scăderea numărului de moli (2 / 1,5) şi faptul că doar o fracțiune $p_s / p_v = 1/3$ din apa formată rămâne în stare gazoasă .

6.1.24. ***Prin comprimarea* izotermă *a*** m = 9,0 g ***vapori de apă la temperatura*** t = 100°C***, presiunea vaporilor a crescut de*** n = 2,0 ori***, iar volumul a scăzut de*** n + 1 ***ori. Aflați volumul inițial al vaporilor de apă.***

Rezolvare. Deoarece prin comprimare izotermă presiunea a crescut, înseamnă că vaporii **nu** au fost saturanți. Deoarece volumul nu a scăzut tot de *n* ori (aşa cum cere *legea **Boyle-Mariotte*** pentru gaze *ideale*), înseamnă că vaporii prin comprimare izotermă

au devenit la un moment dat saturanți, după care presiunea a rămas *constantă*. Deoarece t = 100°C, presiunea vaporilor saturanți este chiar presiunea *normală* p_s = 101,3 kPa (apa fierbe la 100°C la presiunea *normală*).

Prin urmare, dacă presiunea finală este p_s înseamnă că cea inițială a fost $p_v = p_s / n$ şi ecuația de ***stare*** dă :

$$p_v V = (p_s / n)V = (m / \mu) RT , \quad V = (m / \mu) RT n / p_s = 31 \text{ L}.$$

6.1.25. ***Într-un vas, inițial vidat, de volum*** V = 1,00 L, ***închis ermetic, se introduce o fiolă deschisă cu*** m = 10 g ***apă, care este încălzită până la*** t = 100°C ***şi menținută în continuare la această temperatură. Ce masă de apă se evaporă ?***

Rezolvare. Practic instantaneu se evaporă apă până se atinge presiunea vaporilor *saturanți*, corespunzătoare practic temperaturii inițiale a apei (vaporizarea în vid). Apoi se evaporă apa în continuare până se obține presiunea vaporilor saturanți p_s = 101,3 kPa corespunzătoare temperaturii t = 100°C , deci

$$m = \mu p_s V / (RT) = 0{,}58 \text{ g}$$

(am neglijat volumul apei lichide rămase ~ 9 cm³ « $V = 10^3$ cm³).

6.1.26. ***O pompă pompează cu debitul*** q = 0,80 L/s ***vaporii de apă dintr-un vas pe fundul căruia sunt*** m = 200 g ***apă. Temperatura este menținută constantă*** t = 20°C . ***Aflați timpul după care apa se vaporizează complet.***

Rezolvare. Masa de vapori m_v^* evacuată în *unitatea* de *timp* se poate afla din *ecuația de stare*, considerând că apa se evaporă suficient de repede pentru a satura corpul de pompă, deci pentru a avea mereu vapori *saturanți* la temperatura t (p_s = 2,33 kPa, ρ_s = = 17,3 g/m³). În unitatea de timp volumul de vapori evacuat este q, prin urmare,

$$p_s q = (m_v^* / \mu)RT \quad \text{sau direct} \quad m_v^* = \rho_s q , \qquad (1)$$

de unde

$$\tau = m / m_v^* = mRT / (\mu p_s q) = m / (\rho_s q) = 4{,}0 \text{ h} . \qquad (2)$$

6.1.27. ***Într-un vas, inițial vidat, de volum*** V = 1,00 L, ***s-a introdus o masă de apă şi s-au măsurat presiunile la trei temperaturi :*** t_1 = 80°C, p_1 = 19,2 kPa ; t_2 = 90°C, p_2 = 42 kPa ; t_3 = = 120°C, p_3 = 45,5 kPa . ***Aflați masa apei. Cât devin cele 3 presiuni dacă masa apei se reduce cu*** f = 20 % ***?***

Rezolvare. Masa vaporilor din vas se calculează din ecuația de stare : $m_1 = \mu p_1 V/(RT_1) = 0{,}125$ g $< m_2 = \mu p_2 V/(RT_2) =$

$$= m_3 = \mu p_3 V/(RT_3) = 25 \text{ g} . \qquad (1)$$

De aici se vede că în primul caz avem vapori *saturanți* plus apă lichidă, iar în cazurile *2*, *3* avem vapori ***ne**saturanți* (toată apa s-a vaporizat).

Noua masă de apă $m' = (1 - f)m = 20$ g $> m_1$, prin urmare, la temperatura t_1 vom avea şi acum vapori *saturanți* la presiunea p_1' $= p_1$.

La celelalte două temperaturi vaporii rămân evident ***ne**saturanți* (prin micşorarea apei vaporizate) :

$$p_2' = p_2 \cdot m'/m = (1 - f)p_2 = 0{,}80\, p_2 , \quad p_3' = 0{,}80\, p_3 . \qquad (2)$$

6.1.28. ***Într-un vas închis se află*** $m_v = 100$ g ***vapori de apă la temperatura*** $t = 100^oC$ ***şi o masă*** $m_a = 1{,}0$ g ***apă. Până la ce temperatură trebuie încălzit vasul pentru ca să se evapore toată apa ? Ce cantitate de căldură este necesară ? Se ştie că presiunea vaporilor saturanți ai apei în jurul temperaturii de*** 100^oC ***variază cu*** $\alpha = 3{,}7$ kPa/K. ***Se dau*** $\lambda_v = 2{,}25$ MJ/kg ***şi pentru vaporii de apă*** $c_v = 1{,}38$ kJ/(kg·K) .

Rezolvare. Deoarece vaporii sunt în *echilibru termic* cu lichidul din care provin, înseamnă ca ei sunt *saturanți*, şi deoarece $t =$ = 100^oC înseamnă că presiunea lor este cea *normală* $p_s = p_o =$ = 101,3 kPa (apa fierbe la 100^oC la presiune *normală*). *Ecuația de **stare*** în cele două stări :

$$p_s V = (m_v/\mu)RT, \quad (p_s + \Delta p_s)V = [(m_v + m_a)/\mu]R(T + \Delta T), \qquad (1)$$

dar conform enunțului $\Delta p_s = \alpha\Delta T$, atunci cea de-a doua ecuație devine

$$(p_s + \alpha\Delta T)V = [(m_v + m_a)/\mu]R(T + \Delta T), \qquad (2)$$

Scăzând de aici prima ecuație (1) :

$$\alpha\Delta T\, V = (R/\mu)\,[m_a T + (m_v + m_a)\,\Delta T] \qquad (3)$$

şi împărțind la prima ecuație (1) :

$$\Delta T = T \cdot m_a p_s : [m_v \alpha T - p_s(m_v + m_a)] = 0{,}3 \text{ K}, \qquad (4)$$

ceea ce justifică aproximația $\Delta p_s = \alpha\,\Delta T$ (*metoda **autoconsistentă***). Căldura necesară se poate scrie astfel :

$$Q \cong m_a\lambda_v + (m_v + m_a)c_v\,\Delta T = 2{,}29 \text{ kJ} , \qquad (5)$$

ultimul termen este foarte mic (40,4 J) .

6.1.29. ***Într-un cilindru vertical, izolat termic, sub un pis-ton de secțiune*** $S = 100\ cm^2$ ***şi masă neglijabilă, se află*** $m_v = 18$ g ***vapori saturanți de apă. În cilindru se introduc*** $m_a = 18$ g ***apă la*** 0^oC. ***Cu cât coboară pistonul ? Presiunea atmosferică este normală. Capacitatea calorică a cilindrului şi pistonului sunt neglijabile.***

Rezolvare. Fiind vapori *saturanți* la o presiune egală cu cea *normală*, înseamnă că temperatura $t = 100^oC$ (apa fierbe la 100^oC la presiunea atmosferică normală). Deoarece masa vaporilor m_v este egală cu masa apei m_a şi deoarece $m_a c\Delta t < m_v\lambda_v$, apa rece m_a se va încălzi până la $t = 100^oC$ pe seama căldurii de la conden-sarea unei părți a vaporilor saturanți şi vom avea, în echilibru, apă şi vapori saturanți la 100^oC.

$$m_a c\Delta t = m_v' \lambda_v ,\ m_v' = m_a c\Delta t / \lambda_v = m_a c\, t / \lambda_v = 3{,}3\ g . \qquad (1)$$

Această masă de vapori ocupă volumul

$$V' = (m_v' / \mu)RT / p_0 = 5{,}7\ L . \qquad (2)$$

Volumul apei condensate din vapori este neglijabil ($3{,}3\ cm^3$ « « 5,7 L), astfel încât

$$h = V' / S = 57\ cm \qquad (3)$$

(stratul de apă condensată ar avea grosimea 3,3 / 100 = 0,33 mm).

6.1.30. ***Un amestec din*** m_1=100 g ***azot şi*** m_2 ***oxigen este su-pus unei comprimări* izoterme *la temperatura*** T =77 K = ***tempe-ratura de fierbere a azotului la presiunea normală. S-a obținut graficul din figură în unități arbitrare. Aflați masa*** m_2 ***a oxige-nului şi presiunea vaporilor săi saturanți la temperatura*** T = 77 K. ***La presiunea normală oxigenul fierbe la temperatura*** 90 K.

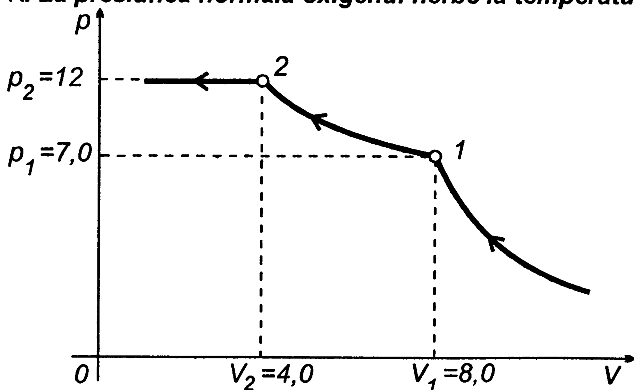


Fig.6.1.30

Rezolvare. Deoarece pentru $V < V_2$ palierul este **orizontal**, acolo avem o transformare *izotermă* (conform enunțului) care este în acelaşi timp şi **izobară**, deci conform izotermelor lui ***Andrews*** acolo se produce condensarea ambelor gaze şi presiunea este egală cu suma presiunilor vaporilor saturanți (la $T = 77$ K) :

$$p_2 = p_{s1} + p_{s2} = p_o + p_{s2}, \text{ căci } p_{s1} = p_o, \quad (1)$$

deoarece $T = 77$ K este temperatura de fierbere a azotului la presiunea atmosferică normală p_o. Deoarece O_2 se află la $T = 77$ K, care este mai mică decât temperatura sa de fierbere (90 K) la presiunea normală p_o, înseamnă că $p_{s2} < p_o$ (p_{s2} devine p_o la temperatura de fierbere a oxigenului).

Dacă după *2* condensează ambele gaze, este clar din grafic că de la *1* la *2* condensează un singur gaz, iar până la *1* **nu** condensează nici unul şi avem acolo o izotermă **Boyle-Mariotte**.

Să presupunem că în *1* începe condensarea oxigenului, adică prin comprimare (izotermă) vaporii săi devin saturanți. Atunci în punctul *1* trebuie să avem :

$$p_1 = p_{s2} + p_{s1} \cdot V_2 / V_1 = p_{s2} + p_o V_2 / V_1, \quad (2)$$

unde al doilea termen se obține din transformarea *Boyle-Mariotte* a azotului pe porțiunea *1 - 2*.

Facem raportul celor două expresii (1) şi (2) pentru a elimina unitățile arbitrare de presiune, necunoscute :

$$p_2 / p_1 = (p_o + p_{s2}) : (p_{s2} + p_o V_2 / V_1) \rightarrow$$

$$p_{s2} = p_o [1 - p_2V_2 / (p_1V_1)] : (p_2 / p_1 - 1) = p_o / 5 = 20{,}3 \text{ kPa}. \quad (3)$$

Ipoteza că în *1* începe condensarea azotului conduce la $p_{s2} = 5p_o > p_o$, contrar celor stabilite mai sus.

În punctul *1* pentru *oxigen*, respectiv în punctul *2* pentru *azot*, ecuația de **stare** ne dă :

$$p_{s2}V_1 = (m_2 / \mu_2)RT, \quad \text{respectiv} \quad p_oV_2 = (m_1 / \mu_1)RT. \quad (4)$$

Împărțind membru la membru aceste ecuații, obținem :

$$p_{s2}V_1 / (p_oV_2) = m_2 \mu_1 / (m_1 \mu_2) \rightarrow$$

$$m_2 = m_1 [p_{s2}V_1 / (p_oV_2)] \cdot \mu_2 / \mu_1 = (16 / 35) m_1 = 46 \text{ g}. \quad (5)$$

6.1.31. ***Un piston, care se poate mişca etanş fără frecări, se află în echilibru şi împarte un cilindru orizontal în două jumătăți de volum*** V = 1,00 L ***fiecare. Într-o parte se află aer uscat, iar în cealaltă vapori de apă şi*** m = 4,0 g ***apă. Încălzind lent sistemul, pistonul ajunge într-o nouă poziție de echilibru, deplasându-se cu*** V / 2. ***Aflați masa*** m_v ***a vaporilor înainte de***

încălzire, masa aerului, temperatura inițială și cea finală, presiunea inițială și cea finală. Pentru presiunea vaporilor saturanți ai apei în funcție de temperatură se poate folosi Tabelul de la Anexe sau tabelul următor :

t, °C	100	120	133	152	180
p_s, kPa	100	200	300	500	1000

Rezolvare. Pentru jumătatea cu aer uscat, respectiv pentru vaporii din cealaltă jumătate, avem ecuațiile :

$$pV/T_1 = p_2(V/2)/T_2 ,\quad p_1V = (m_v/\mu)RT_1 , \qquad (1)$$

unde p_1 este presiunea de o parte și de alta a pistonului și în același timp este presiunea vaporilor *saturanți* la temperatura t_1 :

$$p_1 = p_s(t_1) .$$

Prin încălzirea sistemului pistonul se va deplasa până când se evaporă toată apa și presiunea devine $p_2 = p_s(t_2)$, egală de o parte și de alta a pistonului. De aici încolo, chiar dacă continuăm încălzirea, pistonul va sta pe loc în echilibru.

În momentul evaporării complete a apei :

$$p_2 \cdot 3V/2 = [(m_v + m)/\mu]\,RT_2 . \qquad (2)$$

Ținând seama de (1) partea stângă a ecuației (2) se prelucrează:

$$3p_2\,V/2 = 3(T_2/T_1)p_1V = 3(m_v/\mu)RT_2 = [(m_v + m)/\mu]RT_2 \rightarrow$$

$$m_v = m/2 = 2{,}0 \text{ g}. \qquad (3)$$

Acum reprezentăm grafic tabelul dat $p_s = f(t)$. Pe de altă parte, din (1) avem $p_1 = (m_v/\mu)RT_1/V$, (4)

deci construim graficul corespunzător $p = (m_v/\mu)(R/V)\cdot T$ sau numeric : $p_{[kPa]} = 0{,}92\ T$ și îl intersectăm cu $p_s = f(t)$, de unde găsim punctul de intersecție: $t_1 = 140°C$, $p_1 = 375$ kPa . (5)

Mai departe, din (2)avem :

$$p_2 = [(m_v + m)/\mu]\,[R/(3V/2)]\cdot T_2 , \qquad (6)$$

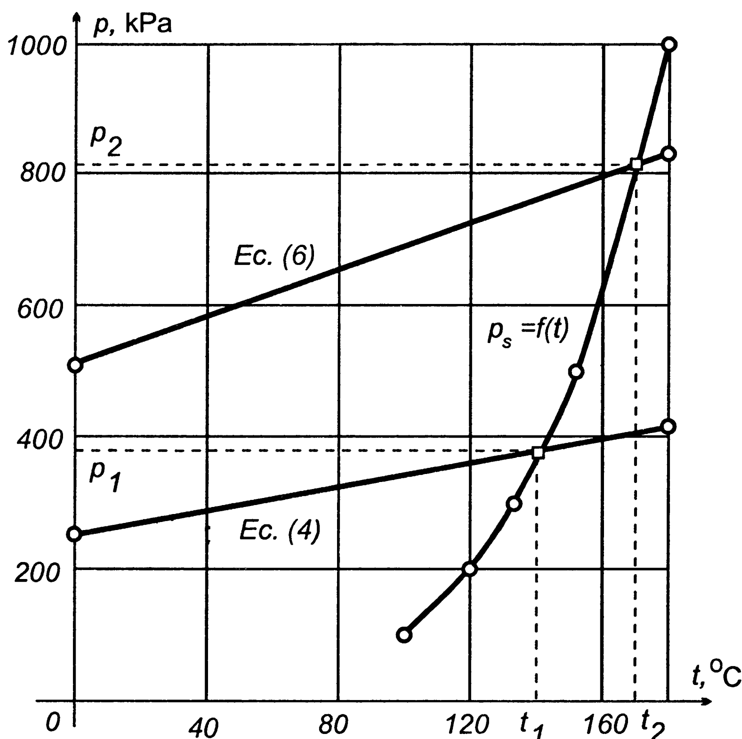
deci construim graficul corespunzător

$p = [(m_v + m)/\mu]\,[R/(3V/2)]\cdot T$ sau numeric $p_{[kPa]} = 1{,}85\ T$ și îl intersectăm cu $p_s = f(t)$, de unde găsim punctul de intersecție:

$$t_2 = 170°C ,\quad p_2 = 813 \text{ kPa} . \qquad (7)$$

Masa de aer se obține acum din ecuația de **stare** :

$$m_{aer} = \mu_{aer}\,p_1V/(RT_1) = 3{,}17 \text{ g} . \qquad (8)$$



*** 6.1.32. *Cunoscând temperatura de fierbere a apei pe un munte, evaluați înălțimea muntelui şi precizia acestei evaluări.***

Rezolvare. Cunoscând temperatura de *fierbere* a apei, găsim din *Tabele* presiunea *atmosferică* corespunzătoare, iar din formula *barometrică* rezultă înălțimea muntelui. La o precizie $\Delta t_f = 0{,}1^oC$ rezultă o precizie $\Delta p \approx 300$ Pa, conform Tabelului. Deoarece aceste variații sunt mici le putem calcula ca diferențiale.

Diferențiem *logaritmic* formula barometrică (adică întâi logaritmăm apoi diferențiem) :

$$p = p_o\, e^{-\mu g h/(kT)}, \quad dp/p = -[\mu g/(RT)]\, dh, \qquad (7)$$

de unde trecând la variații **mici** în locul diferențialelor :

$$\Delta h = -[RT/(\mu g p)]\, \Delta p. \qquad (2)$$

Cu valori obişnuite ale mărimilor, rezultă precizia de determinare $\Delta h \sim 30$ m .

6.2. Higrometrie

6.2.1. a) ***Arătaţi că pentru temperaturi obişnuite de cameră*** (0 ... 35°C) ***densitatea vaporilor de apă exprimată în*** g/m³ ***este numeric egală, aproximativ, cu presiunea vaporilor de apă exprimată în*** mm Hg (torr) .

b) ***Arătaţi că raportul densităţilor vaporilor*** **saturanţi** ***este egal cu raportul presiunilor vaporilor*** **saturanţi** ***înmulţit cu raportul invers al temperaturilor absolute.***

Rezolvare. a) $\rho = \mu p / (RT) \rightarrow \rho_{[g/m^3]} =$

$= 18\ (g/mol) \cdot p_{[torr]} \cdot 133,322\ (Pa/torr) : \{8,31\ [J/(mol \cdot K)] \cdot T_{[K]}\} =$

$$= (288,6 / T) \cdot p_{[torr]} . \qquad (1)$$

Exemple numerice:

la $t = 0°C \rightarrow \rho_{[g/m^3]} = 1,057\ p_{[torr]}$,

la $t = 15,5°C \rightarrow \rho_{[g/m^3]} = p_{[torr]}$,

la $t = 35°C \rightarrow \rho_{[g/m^3]} = 0,937\ p_{[torr]}$.

b) $\rho_s = \mu p_s / (RT) \rightarrow \rho_{s1} / \rho_{s2} = (p_{s1} / p_{s2}) \cdot (T_2 / T_1)$. (2)

6.2.2. ***La ce temperatură a aerului din cameră umiditatea relativă este*** U = 50 %, ***dacă punctul de rouă (izocor) este*** $t_r =$ $= 8,0°C$ ***? Dar dacă punctul de rouă s-a obţinut prin răcire*** **izobară** ***?***

Rezolvare. a) Prin răcire izocoră *densitatea* vaporilor nu se schimbă ($\rho_v = m_v / V$) până la obţinerea punctului de rouă când vaporii devin *saturanţi* şi începe condensarea. În acest moment :

$$\rho_v = \rho_s(t_r) \text{ (se ia din Tabele) }, \rightarrow \qquad (1)$$

dar $U = \rho_v / \rho_s \rightarrow \rho_s(t) = \rho_v / U = \rho_s(t_r) / U = 16,4\ g/m^3$, (2)

ceea ce corespunde temperaturii $t = 19°C$ (după *Tabele*).

b) Prin răcire izobară *presiunea* vaporilor (p_v) nu se schimbă, dar la o anumită temperatură ei devin *saturanţi* şi începe condensarea. În acest moment : $p_v = p_s(t_r) = 1,07$ kPa (după *Tabele*), (3)

dar $U = p_v / p_s \rightarrow p_s(t) = p_v / U = p_s(t_r) / U = 2{,}14$ kPa, (4)

ceea ce corespunde temperaturii $t = 18{,}5^oC$ (după Tabele) (deosebirea dintre temperatura punctului de rouă, obținută prin răcire izocoră sau prin răcire izobară, este mică).

6.2.3. ***Într-o cameră de volum*** V = 50 m^3 ***temperatura aerului este*** t = 20°C ***şi punctul de rouă izobar*** t_r = 12°C. a) ***Aflați umiditatea absolută şi cea relativă, precum şi masa vaporilor din cameră.*** b) ***Dar dacă punctul de rouă*** t_r = 12°C ***este obținut prin răcire izocoră a unei probe de aer ?***

Rezolvare. Analog problemei precedente :

a) $p_v = p_s(t_r) = 1{,}40$ kPa , (1)

$U = p_v / p_s(t) = p_s(t_r) : p_s(t) = 60$ % , (2)

$\rho_s(t_r) = 10{,}7$ g/m^3 , (3)

$\rho_v = \mu p_v / (RT) = [\mu\, p_s(t_r) / (RT_r)]\, (T_r / T) =$

$= \rho_s(t_r)\, (T_r / T) = 10{,}4$ g/m^3 (4)

(ceea ce se putea scrie direct) , $m_v = \rho_v V = 0{,}52$ kg . (5)

b) $\rho_v = \rho_s(t_r) = 10{,}7$ g/m^3 ,

$U = \rho_v / \rho_s = \rho_s(t_r) : \rho_s(t) = 62$ %, (6)

$m_v = \rho_v V = 0{,}535$ kg . (7)

6.2.4. ***Într-un vas închis se află aer umed la temperatura*** t_1 = 27°C, ***având umiditatea relativă*** U_1 = 60 %, ($p_s(t_1)$ = 3,56 kPa). ***Cât devine umiditatea relativă dacă încălzim vasul cu aerul până la*** t_2 = 100°C ***?***

Rezolvare. $U_1 = p_{v1} / p_{s1}$, dar prin încălzire izocoră :

$p_{v2} / p_{v1} = T_2 / T_1$, $U_2 = p_{v2} / p_{s2} = (p_{v1} / p_{s2}) \cdot (T_2 / T_1) =$

$= U_1\, (p_{s1} / p_{s2}) \cdot (T_2 / T_1) = 2{,}6$ % , (1)

unde $p_{s2} = p_o$ - presiunea normală deoarece $t_2 = 100^oC$.

6.2.5. ***La temperatura*** t_1 = 17°C ***umiditatea relativă este*** U_1 = 60 %. ***Aflați umiditatea relativă la temperatura*** t_2 = 24 °C , ***dacă :*** a) ***umiditatea absolută nu se schimbă,*** b) ***presiunea vaporilor nu se schimbă .***

Rezolvare. a) $\rho_v = U_1 \rho_s(t_1) = 8{,}7$ g/m^3 , (1)

$U_2 = \rho_v : \rho_s(t_2) = U_1 \cdot \rho_s(t_1) : \rho_s(t_2) = 40$ % . (2)

b) $p_v = U_1\, p_s(t_1) = 1{,}16$ kPa , (3)

$U_2 = p_v : p_s(t_2) = U_1\, p_s(t_1) : p_s(t_2) = 39\ \%$. (4)

Umiditatea ***relativă*** scade prin creşterea temperaturii (încălzire). Dimpotrivă, prin scăderea temperaturii (răcire) umiditatea relativă creşte şi se ajunge la $U = 100\ \%$ când vaporii devin saturanți şi începe condensarea lor.

6.2.6. ***Într-un salon de volum*** V = 600 m³, ***la temperatura*** $t_1 = 20^oC$, ***umiditatea este*** U = 60 %. ***Ce masă de apă trebuie evaporată pentru a păstra aceeaşi umiditate relativă la*** $t_2 = 30^oC$ ***?***

Rezolvare. $U = p_v / p_s$, atunci din *ecuația de stare* obținem :

$m_{v1} = \mu p_{v1} V / (RT_1) = \mu U p_{s1} V / (RT_1)$, $m_{v2} = \mu U p_{s2}\, V / (RT_2)$, (1)

$\Delta m = m_{v2} - m_{v1} = (\, \mu V / R) U\, (p_{s2} / T_2 - p_{s1} / T_1) = 4{,}6$ kg , (2)

unde $p_{s1,2}$ se iau din *Tabele*.

6.2.7. ***Într-o incintă (vidată) de volum*** V = 3,0 m³ ***se introduc la aceeaşi temperatură un volum*** $V_1 = 2{,}0$ m³ ***aer cu umiditatea*** $U_1 = 30\ \%$ ***şi un volum*** $V_2 = V - V_1 = 1{,}0$ m³ ***aer cu umiditatea*** $U_2 = 20\ \%$. ***Care va fi umiditatea în incintă?***

Rezolvare. $U = p_v / p_s = (1 / p_s)[p_{v1}\, V_1 / V + p_{v2}\, V_2 / V]$, (1)

unde în paranteze sunt presiunile *parțiale* din amestec ale vaporilor proveniți de la cele două volume (prin destindere *izotermă* de la $V_{1,2}$ la V). $U = (1/ p_s)[U_1 p_s V_1 / V + U_2\, p_s V_2 / V] =$

$= (U_1 V_1 + U_2 V_2) : V = 27\ \%$. (2)

6.2.8. ***Aflați raportul dintre densitatea aerului* uscat *şi densitatea aerului* umed *cu umiditatea*** U = 50 %, ***la presiunea*** p = = 100 kPa ***şi temperatura*** t = 20°C .

Rezolvare. Masa aerului uscat, respectiv umed, se obține din *ecuația de stare* :

$m = \mu_a p V / (RT)$, respectiv $m' = \mu_a p_a V / (RT) + \mu_v p_v V / (RT)$,(1)

unde $p = p_a + p_v = p_a + U p_s$, (2)

$m' = \mu_a (p - U p_s) V / (RT) + \mu_v U p_s V / (RT)$, (3)

$\rho / \rho' = m / m' = \mu_a p : [\mu_a (p - U p_s) + \mu_v U p_s] = 1{,}004$. (4)

6.2.9. ***Într-un cilindru se află aer cu umiditatea relativă*** $U_1 = 60\ \%$ ***la temperatura*** $t_1 = 10^oC$. ***Cât devine umiditatea relativă dacă mărim temperatura până la*** $t_2 = 100^oC$ ***şi micşorăm volumul de*** k = 4,0 ori ***?***

Rezolvare. $p_{v1} = U_1 p_{s1}$, $p_{v1} V / T_1 = p_{v2}(V / k) / T_2$, (1)

$p_{v2} = p_{v1}\, kT_2 / T_1 = 380$ Pa $< p_{s2} = p_o$, (2)

deci vaporii, în adevăr, nu devin saturanți ,

$U_2 = p_{v2} / p_{s2} = (p_{v1} / p_{s2})\, kT_2 / T_1 = U_1(p_{s1} / p_{s2})\, kT_2 / T_1 = 3{,}7$ %; (3)

unde $p_{s2} = p_o$ - presiunea *normală* ($t_2 = 100^oC$) .

6.2.10. ***Pentru a afla umiditatea aerului la*** $t_1 = 18^oC$ ***s-a luat un volum de aer într-un cilindru cu piston, s-a încălzit izocor până la*** $t_2 = 30^oC$ ***şi apoi s-a comprimat izoterm. S-a observat că condensarea a început când presiunea a crescut izoterm de*** n = 10 ori. ***Aflați umiditatea relativă a aerului inițial .***

Rezolvare. Prin încălzire izocoră ρ_{v1} nu se schimbă, iar prin comprimare izotermă : $\rho_{v2} = \rho_{s2} = n\, \rho_{v1}$, deci

$U = \rho_{v1} / \rho_{s1} = \rho_{s2} / (n\, \rho_{s1}) = 19{,}7$ % .

6.2.11. ***Într-un vas închis se află aer umed la temperatura*** $t_1 = 100^oC$ ***şi umiditatea*** $U_1 = 3{,}5$ % . ***Cât devine umiditatea dacă temperatura scade la*** $t_2 = 29\ ^oC$ *?*

Rezolvare. *Ecuația de stare* se scrie :

$(m / \mu)RT_1 = p_{v1}\, V = U_1 p_{s1}\, V$;

$p_{v2}\, V = (m / \mu)RT_2 = U_1 p_{s1}\, V \cdot T_2 / T_1$, (1)

$U_2 = p_{v2} / p_{s2} = (U_1 p_{s1} / p_{s2}) \cdot T_2 / T_1 = 72$ % , (2)

unde $p_{s1} = p_o$ - presiunea normală ($t_1 = 100^oC$). Prin răcire umiditatea relativă creşte (scad p_s , ρ_s).

6.2.12. ***Un vas închis conține aer de umiditate*** $U_1 = 76$ % ***la temperatura*** $t_1 = 25^oC$. ***Care va fi umiditatea relativă a aerului dacă îl încălzim până la*** $t_2 = 100^oC$ ***şi îi micşorăm volumul de*** n = 10 ori *?*

Rezolvare. $m_v = \rho_{v1}\, V = U_1\, \rho_{s1}\, V$, (1)

$U_2 = m_v / m_{s2} = U_1\, \rho_{s1}\, V : (\rho_{s2}\, V / n) = U_1\, \rho_{s1}\, n : \rho_{s2} = 23$ % , (2)

unde $\rho_{s1,2}$ se iau din *Tabele* .

6.2.13. ***Într-un vas închis umiditatea relativă este*** U = 30 %. ***Introducând*** m = 0,10 g ***apă, vaporii din vas devin saturanți cu densitatea*** $\rho_s = 17{,}3\ g/m^3$. ***Aflați volumul vasului .***

Rezolvare. *Ecuația de stare* în cele două cazuri :

$p_v V = U p_s V = (m_v / \mu)RT$;

$p_s V = [(m_v + m)/\mu] RT, \quad \rho_s = \mu p_s / (RT)$. (1)

Din primele două ecuații prin scădere obținem :

$(1 - U) p_s V = (m/\mu) RT = m (p_s / \rho_s) \rightarrow V = m / [\rho_s (1 - U)] = 8{,}3$ L.(2)

6.2.14. ***Aflați umiditatea aerului la temperatura*** t = 22°C ***și presiunea normală*** p_0, ***știind că prin comprimarea izotermă a unei probe din acest aer până la presiunea*** p = 6,0 atm ***s-a obținut aer cu punctul de rouă (izocor)*** t_r = 10,0°C .

Rezolvare. $\rho_v(t,p) = \rho_s(t_r)$, dar $\rho_v(t,p) = \rho_v(t,p_0)\, p / p_0$, (1)

$U = \rho_v(t,p_0) : \rho_s(t) = \rho_v(t,p)\,(p_0 / p) : \rho_s(t) =$

$= [\rho_s(t_r) / \rho_s(t)] \cdot (p_0 / p) = 8{,}1$ % . (2)

6.2.15. ***Aerul la temperatura*** t_1 = 20°C ***are umiditatea relativă*** U = 70 %. ***Ce masă de vapori se condensează dintr-un volum*** V = 10 m^3 ***aer, dacă temperatura coboară la*** t_2 = 10°C ***?***

Rezolvare. $\Delta m = m_1 - m_2 = \mu p_{v1} V / (RT_1) - \mu p_{s2} V / (RT_2) =$

$= (\mu V / R)(U p_{s1} / T_1 - p_{s2} / T_2) = 27$ g .

6.2.16. ***Noaptea, la temperatura*** t_1 = 7,0°C ***și umiditatea relativă*** U_1 = 80 % , ***presiunea aerului este normală. Cât devine presiunea atmosferică ziua , dacă temperatura crește la*** t_2 = = 12°C, ***iar umiditatea scade la*** U_2 = 60 % , ***în ipoteza că rămâne neschimbată: a) densitatea parțială a aerului, b) presiunea parțială a aerului ?***

Rezolvare. a) Dacă densitatea parțială a aerului nu se schimbă, înseamnă că masa parțială a aerului din orice volum dat nu se schimbă, dar atunci presiunea parțială a aerului $H_1 - p_{v1}$ se schimbă izocor și presiunea atmosferică finală va fi :

$H_2 = p_{v2} + (H_1 - p_{v1}) \cdot T_2 / T_1 =$

$= U_2 p_{s2} + (H_1 - U_1 p_{s1}) \cdot T_2 / T_1 = 103{,}0$ kPa . (1)

b) În acest caz presiunea parțială a aerului $H_1 - p_{v1}$ nu se scimbă și presiunea atmosferică finală va fi :

$H_2 = p_{v2} + (H_1 - p_{v1}) = U_2 p_{s2} + (H_1 - U_1 p_{s1}) = 101{,}36$ kPa . (2)

6.2.17. ***Aerul umed dintr-un cilindru cu piston are temperatura*** t_1 = 27°C, ***presiunea*** p_1 = 101,15 kPa ***și umiditatea*** U_1 = = 70 % . ***Aflați umiditatea și presiunea aerului dacă îl încălzim până la*** t_2 = 37°C ***și îi micșorăm volumul de*** n = 3,0 ori .

Rezolvare. $p_{v1} = U_1 p_{s1} = 2{,}493$ kPa , (1)

$p_{v2} = p_{v1}\,[V : (V/n)]\, T_2/T_1 = 7{,}7$ kPa $> p_{s2} = 6{,}27$ kPa , (2)
deci vaporii devin saturanți (o parte se condensează) şi U_2 =100 %.

Presiunea aerului umed în starea finală se compune din presiunea aerului uscat şi presiunea vaporilor saturanți :

$p_2 = (p_1 - p_{v1})[V : (V/n)](T_2/T_1) + p_{s2} = 3{,}08$ atm . (3)

Se condensează masa de vapori $m_v = \rho_{v1}V - \rho_{s2}\,V/n$.

6.2.18. ***Rezervorul unui termometru cu gaz la volum constant este umplut cu aer. La*** 0°C ***presiunea aerului din rezervor este normală*** (p_o)***. La temperatura măsurată presiunea a devenit*** p = 108,657 kPa. ***Aflați temperatura măsurată dacă aerul din rezervorul termometrului : a) era uscat, b) era de fapt*** **umed,** ***având umiditatea*** U = 60 % ***la temperatura*** t ' = 20°C .

Rezolvare. a) Transformarea izocoră a aerului uscat, considerat gaz ideal : $T = T_o \cdot p/p_o = 293$ K = 20°C . (1)

b) *Densitatea* vaporilor de apă :

$\rho_v = U\rho_s' = 10{,}38$ g/m^3 $> \rho_{so}$ (0°C) = 4,84 g/m^3 , (2)

deci la 0°C o parte din vapori sunt condensați. Atunci presiunea aerului umed p la temperatura măsurată T se compune din presiunea parțială a aerului uscat plus presiunea parțială a vaporilor de apă : $p = (p_o - p_{so})\,T/T_o + p_v'\,T/T' =$

$= (p_o - p_{so})\,T/T_o + Up_v'\,T/T'$, (3)

de unde

$T = p : [(p_o - p_{so})/T_o + Up_v'/T'] = 291$ K = 18°C . (4)

6.2.19. ***Cu cât devine mai greu un balon de volum*** V=10 m^3 ***dacă umiditatea aerului atmosferic exterior creşte cu*** ΔU=18% ***la temperatura*** t = 14°C ***şi aceeaşi presiune atmosferică (totală) ?***

Rezolvare. $\Delta G = \Delta(mg - F_A) = -\Delta F_A = -\Delta m_{dezl.}g$. (1)

Din *ecuația de stare* avem :

$m_{dezl.} = (\mu_{aer}p_{aer} + \mu_v p_v)\,V/(RT) =$

$= [V/(RT)]\,[\mu_{aer}(p - p_v) + \mu_v p_v] = [V/(RT)]\,[\mu_{aer}p - (\mu_{aer} - \mu_v)p_v] =$

$= [V/(RT)]\,[\mu_{aer}p + (\mu_v - \mu_{aer})Up_s]$, (2)

$\Delta m_{dezl.} = [V/(RT)]\,(\mu_v - \mu_{aer})\Delta U p_s = (V\rho_s/\mu_v)\,(\mu_v - \mu_{aer})\Delta U$, (3)

$\Delta G = -\Delta m_{dezl.}g = \Delta U\,\rho_s V g\,(\mu_{aer}/\mu_v - 1) = 0{,}13$ N . (4)

Observăm că *aerul umed este mai uşor decât cel uscat* , de aceea greutatea aerului dezlocuit, ca şi forța arhimedică, a scăzut şi deci greutatea aparentă a crescut .

6.2.20. ***Într-un cilindru vertical, cu piston de diametru*** D = = 5,0 cm, ***se află la fund o mică scobitură cilindrică (verticală) de diametru*** d = 2,0 mm ***în care s-a strâns o peliculă fină de apă. La temperatura constantă*** t = 20°C ***pistonul este coborît încet pe o distanță*** H = 10 cm, ***iar în scobitură se strânge puțină apă, astfel încât nivelul apei creşte cu*** h =1,0 mm. ***Aflați presiunea vaporilor saturanți ai apei la temperatura de mai sus.***

Rezolvare. Masa vaporilor condensați din volumul $V = (\pi D^2/4)H$ este

$$m_v = \rho_{ap\bullet} (\pi d^2/4)h, \quad (1)$$

atunci din ecuația de *stare* obținem : $p_s = (m_v/\mu) RT/V =$

$$= (1/\mu)\, \rho_{ap\bullet} (\pi d^2/4)h \cdot RT : [(\pi D^2/4)H] =$$

$$= (\rho_{ap\bullet}/\mu)(d/D)^2 (h/H)\, RT = 2{,}16 \text{ kPa}. \quad (2)$$

6.2.21. ***Într-un cilindru cu piston se găseşte aer şi vapori saturanți ai apei. Deplasând pistonul, volumul este mărit de*** n_1 = 4,0 ori ***şi în acelaşi timp se introduc vapori, astfel încât masa vaporilor creşte de*** n_2 = 2,0 ori. ***Totul se petrece la temperatură constantă. Aflați umiditatea relativă în starea finală.***

Rezolvare. Mărind izoterm *volumul*, vaporii devin imediat ***ne***saturanți (fiindcă presiunea scade, *nefiind* prezentă apa care să se evapore) şi presiunea lor finală va fi (după *Boyle-Mariotte*) $p_v' = p_s/n_1$. Dar introducând vapori suplimentar, astfel încât masa vaporilor devine de $n_2 < n_1$ ori mai mare, vom avea presiunea finală a vaporilor $p_v'' = p_v' n_2 = p_s\, n_2/n_1$, deci umiditatea relativă a aerului în starea finală :

$$U = p_v''/p_s = n_2/n_1 = 50\ \%.$$

6.2.22. ***Într-un pahar cilindric cu aria secțiunii transversale*** S = 30 cm^2 ***se află*** m = 200 g ***gheață la temperatura*** T = 272 K, ***presiunea vaporilor saturanți fiind*** p_s = 550 Pa. ***Ce presiune se va exercita asupra gheții, dacă paharul este aşezat în vid şi în cât timp sublimează gheața ?***

Rezolvare. Dacă paharul este închis, atunci la echilibru termic, sublimează şi se condensează fluxuri de masă egale : $(1/4)\, \rho_s \bar{v}\, S$. Prin condensare acest flux de masă aduce spre gheață un anumit impuls pe secundă, deci exercită o anumită forță, iar prin sublimare acest flux duce cu el acelaşi impuls pe secundă (la echilibru termic), deci gheața va căpăta un recul, deci fiecare flux contribuie în mod egal la forța exercitată asupra gheții.

Dar la echilibru termic, în aceste condiții presiunea este p_s. Dacă acum deschidem paharul în vid, fluxul moleculelor emergente rămâne acelaşi, dar dispare fluxul moleculelor incidente, deci presiunea asupra gheții va fi $p_0 / 2$.

Timpul de sublimare este dat de fluxul moleculelor emergente:

$$t = m : [(1/4)\, \rho_s\, \overline{v}\, S] = [4mRT / (\mu p_s S)] : \sqrt{8RT/(\pi\mu)} = 100 \text{ s}.$$

În această problemă trebuie cunoscută expresia fluxului de particule: $(1/4)\, n\, \overline{v}\, S$ sau de masă: $(1/4)\, \rho\, \overline{v}\, S$, precum şi formula vitezei medii : $\overline{v} = \sqrt{8RT/(\pi\mu)}$.

6.2.23. ***La umiditatea relativă*** $U_1 = 50$ % ***apa dintr-o farfurioară se evaporă în aer liber în*** $t_1 = 40$ min. ***În cât timp se va evapora aceeaşi apă la umiditatea*** $U_2 = 80$ %, ***la aceeaşi temperatură ?***

Rezolvare. Putem folosi direct formula vitezei de evaporare (masa evaporată în unitatea de timp :

$$v = KS\,(p_s - p_v) / H = KSp_s(1 - U) / H ; \quad (1)$$

$$v_1 = [KSp_s / H]\,(1 - U_1), \qquad v_2 = [KSp_s / H]\,(1 - U_2), \quad (2)$$

$$v_1 / v_2 = (m / t_1) : (m / t_2) = t_2 / t_1 = (1 - U_1) / (1 - U_2),$$

$$t_2 = t_1 \cdot (1 - U_1) / (1 - U_2) = 100 \text{ min}. \quad (3)$$

6.2.24. ***În figură este reprezentată* izoterma *aerului* umed *dintr-o încăpere. Se cunosc presiunile parțiale ale aerului :*** $p_{1,2}$ ***. Aflați umiditatea relativă în cele* 3 *puncte .***

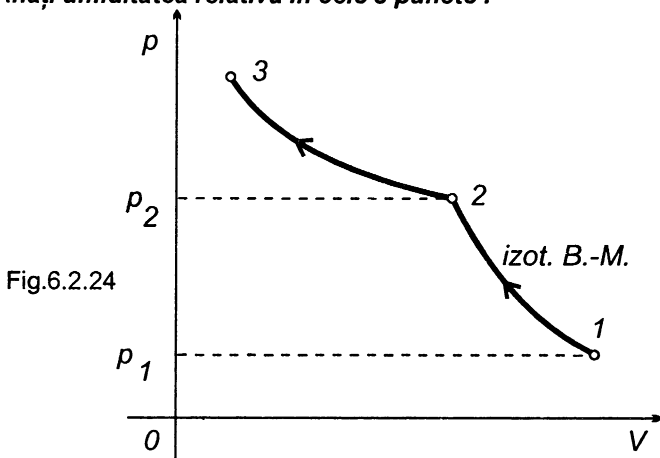


Fig.6.2.24

Rezolvare. Graficul are două porțiuni distincte, de aceea porțiunea *1 - 2* corespunde comprimării *izoterme* **Boyle-Mariotte** a aerului şi vaporilor ***ne***saturanți, care devin saturanți în punctul 2, după care, de la 2 la 3, avem comprimarea izotermă a aerului şi condensarea vaporilor saturanți. Aceasta înseamnă că umiditatea $U_2 = 100\ \%$, $U_3 = 100\ \%$.

$$U_1 = p_{v1} / p_s\ , \text{ dar } p_s = p_{v2}\ , \tag{1}$$

iar $p_{v1,2}$ sunt legați prin transformarea *Boyle-Mariotte* :

$$p_{v1} / p_{v2} = V_2 / V_1 = p_1 / p_2\ , \tag{2}$$

deci

$$U_1 = p_{v1} / p_s = p_{v1} / p_{v2} = p_1 / p_2\ . \tag{3}$$

6.2.25. ***Dacă comprimăm* izoterm *un volum de aer umed de* 4 ori, *presiunea sa creşte de* 3 ori, *iar dacă îl comprimăm de* 8 ori, *presiunea sa creşte de* 5 ori. *Aflați umiditatea relativă a aerului.***

Rezolvare. Deoarece presiunea n-a crescut de 4 ori (respectiv de 8 ori), cum o cere izoterma gazului ideal, înseamnă că se produce *condensarea*. Presiunea parțială p_a a aerului verifică *legea* **Boyle- Mariotte**, astfel încât, dacă în starea inițială $p = p_a + p_v = = p_a + Up_s$, atunci în starea finală o să avem :

$$3p = 3(p_a + Up_s) = 4p_a + p_s\ , \tag{1}$$

$$5p = 5(p_a + Up_s) = 8p_a + p_s\ . \tag{2}$$

Transcriem aceste ecuații astfel :

$$p_a = (3U - 1)p_s\ , \quad 3p_a = (5U - 1)p_s\ . \tag{3}$$

Prin împărțirea acestor ecuații membru la membru rezultă :

$$3 = (5U - 1) / (3U - 1) \rightarrow U = 0{,}50 = 50\ \%\ . \tag{4}$$

* * *

7. CALORIMETRIE

7.1. Calorimetrie simplă

7.1.1. ***Un corp, încălzit până la temperatura*** t_1 = 100°C, ***este cufundat într-un calorimetru cu lichid a cărui temperatură creşte de la*** t_2 = 20°C ***până la*** t_3 = 30°C. ***Ce temperatură finală se obţine, dacă se mai cufundă un corp identic încălzit până la*** t_4 = 50°C ***?***

Rezolvare. Fie C_1 - capacitatea calorică a corpului şi C_2 - capacitatea calorică a calorimetrului cu lichid. Avem pentru prima cufundare :

$$Q_{ced} = C_1(t_1 - t_3) = Q_{prim} = C_2(t_3 - t_2) . \quad (1)$$

La cufundarea corpului al doilea :

$$C_1(t_4 - \theta) = C_1(\theta - t_3) + C_2(\theta - t_3). \quad (2)$$

Introducând aici pe C_2 din (1), se elimină C_1 şi găsim :

$$\theta = [t_3(t_1 + t_4) - t_2(t_3 + t_4)] : (t_1 + t_3 - 2t_2) = 32{,}2\ °C . \quad (3)$$

7.1.2. ***Două lichide cu căldurile specifice*** $c_{1,2}$ ***şi temperaturi iniţiale diferite sunt introduse într-un calorimetru. După stabilirea echilibrului termic diferenţa dintre temperatura unui lichid şi temperatura de echilibru este de două ori mai mică decât diferenţa temperaturilor iniţiale. Aflaţi raportul maselor celor două lichide.***

Rezolvare. *Ecuaţia calorimetrică* se scrie:

$$Q_{ced} = m_1c_1(t_1 - \theta) = Q_{prim} = m_2c_2(t_2 - \theta) . \quad (1)$$

Dar conform enunţului :

$$t_1 - \theta = (t_1 - t_2)/2 \quad \text{sau} \quad t_2 - \theta = (t_2 - t_1) / 2 . \quad (2)$$

Din ecuaţiile (1) şi (2) rezultă (în ambele variante) :

$$m_1c_1\ (t_1 - t_2) / 2 = - m_2c_2\ (t_2 - t_1)/2 , \quad m_1 / m_2 = c_2 / c_1 . \quad (3)$$

7.1.3. ***Dacă în apa dintr-un calorimetru se toarnă un pahar de apă fierbinte, temperatura din calorimetru creşte cu*** Δt_1 =

= 5,0 K . ***Dacă mai turnăm un pahar de apă fierbinte, temperatura apei mai creşte încă cu*** Δt_2 = 3,0 K. ***Cu câte grade va mai creşte în continuare temperatura apei din calorimetru dacă mai turnăm în continuare*** N = 45 ***pahare de apă fierbinte ? Se neglijează pierderile de căldură şi capacitatea calorică a vasului. Care va fi creşterea de temperatură dacă în loc de*** N = 45 ***pahare adăugăm un număr foarte mare de pahare de apă fierbinte ?***

Rezolvare. La turnarea primului pahar de apă fierbinte (t °C), a celui de-al doilea şi a celor N pahare avem *ecuația calorimetrică*

$$Q_{prim} = mc\Delta t_1 = Q_{ced} = m_o c(t - \theta) = m_o c\Delta t \quad (1)$$

(θ - prima temperatură de echilibru termic),

$$(m + m_o)c\Delta t_2 = m_o c(t - \theta') = m_o c(t - \theta + \theta - \theta'),$$

dar $\Delta t_2 = \theta' - \theta$, deci $(m + m_o)c\Delta t_2 = m_o c(\Delta t - \Delta t_2)$, (2)

$$(m + 2m_o)c\Delta t_N = Nm_o c(t - \theta'') = Nm_o c(t - \theta + \theta - \theta' + \theta' - \theta'') =$$
$$= Nm_o c(\Delta t - \Delta t_2 - \Delta t_N) . \quad (3)$$

Din prima ecuație scoatem pe m şi îl introducem în (2) şi (3) :

$$(\Delta t / \Delta t_1 + 1)\, \Delta t_2 = \Delta t - \Delta t_2 , \quad (4)$$

$$(\Delta t / \Delta t_1 + 2)\, \Delta t_N = N(\Delta t - \Delta t_2 - \Delta t_N) . \quad (5)$$

Scoatem Δt din (4) şi îl introducem în (5), după care aflăm pe Δt_N :

$$\Delta t = 2\, \Delta t_1\, \Delta t_2 : (\Delta t_1 - \Delta t_2) , \quad (6)$$

$$\Delta t_N = N\, \Delta t_2\, (\Delta t_1 + \Delta t_2) : [N(\Delta t_1 - \Delta t_2) + 2\, \Delta t_1] = 10{,}8 \text{ K} . \quad (7)$$

Transcriem (7) astfel :

$$\Delta t_N = \Delta t_2\, (\Delta t_1 + \Delta t_2) : (\Delta t_1 - \Delta t_2 + 2\, \Delta t_1 / N) , \quad (8)$$

de unde se vede imediat că pentru N foarte mare ($N \to \infty$) ultimul termen de la numitor se anulează şi rămâne :

$$\Delta t_{max} = \Delta t_2 \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2) : (\Delta t_1 - \Delta t_2) = 12 \text{ K} . \quad (9)$$

7.1.4. ***Pentru a afla randamentul unui bec electric de putere*** P = 100 W, ***acesta a fost cufundat într-un calorimetru cu pereți transparenți , conținând*** m = 1,00 kg ***apă. După*** τ = 5,0 min ***apa s-a încălzit cu*** Δt = 6,8°C. ***Aflați randamentul becului electric.***

Rezolvare. Energia dezvoltată în filamentul becului, $P\tau$, se compune din energia luminoasă utilă, care trece prin pereții transparenți ai becului şi calorimetrului, şi deci nu este preluată de apa din calorimetru, şi din energia calorică (termică) *inutilă* preluată de apa din calorimetru , $mc\Delta t$:

$$\eta = (P\tau - mc\Delta t) : (P\tau) = 5{,}0\ \% .$$

7.1.5. ***Un transformator este solicitat de consumator la o putere*** P = 45 kW ***, mai mare decât puterea de regim . Datorită supraîncărcării transformatorului, masa*** m = 45 kg ***de ulei în care este cufundat transformatorul se încălzeşte cu*** ΔT = 15 K ***în timpul*** τ = 5,0 min. ***Ştiind că*** f = 90 % ***din căldura degajată se transmite uleiului, evaluaţi randamentul transformatorului în acest caz.***

Rezolvare. Energia $P\tau$ solicitată de consumator este energia *utilă*. Energia *totală* dezvoltată se compune din această energie utilă plus căldura degajată. În regim *nominal, staţionar,* această căldură reprezintă circa 2 % din puterea totală. Prin supraîncărcarea transformatorului uleiul va începe să se supraîncălzească, preluând o fracţiune *f* din această căldură(restul fiind preluat de alte materiale şi disipat în mediu). Neglijând căldura corespunzătoare regimului staţionar, putem scrie pentru *energia totală* : $\approx P\tau + mc\Delta t / f$.

Prin urmare, $\eta < P\tau : (P\tau + mc\Delta t / f) = 90\ \%$,

rezultatul justifică neglijarea făcută .

7.1.6. ***Arătaţi că variaţia de volum a unui corp solid sau lichid, datorită absorbirii unei cantităţi date*** Q ***de căldură, nu depinde de volumul iniţial al corpului.***

Rezolvare. $Q = mc\Delta T = \rho_0 V_0\, c\Delta T$, (1)

$\Delta V = V_0 \gamma \Delta T = V_0 \gamma\, Q / (\rho_0 V_0\, c) = \gamma\, Q / (\rho_0\, c)$. (2)

7.1.7. ***Cu ajutorul unui termoplonjor de putere*** P = 100 W ***nu reuşim să aducem la fierbere un volum*** V = 1,00 L ***de apă dintr-un vas. După un timp suficient de lung scoatem termoplonjorul din apă. În cât timp temperatura apei scade cu*** Δt = = 1,0 grd ***?***

Rezolvare. Ajungând la regim *staţionar*, la o temperatură t_{ap}, apropiată de temperatura de fierbere, vasul cu apa pierde spre exterior o putere calorică exact egală cu P . Scoţând termoplonjorul pierderea de căldură spre exterior rămâne practic aceeaşi atâta timp cât scăderea de temperatură $\Delta t \ll t_{ap}$, cum este cazul în problemă. Prin urmare,

$$mc\Delta t \approx P\tau \rightarrow \tau = mc\Delta t / P = 42\ \text{s}\ .$$

7.1.8. ***Într-un vas cu apă se introduce un termoplonjor şi se măsoară temperatura apei în funcţie de timp, obţinându-se tabelul de mai jos.*** a) ***Aflaţi cu câte grade se va răci apa într-un minut, dacă deconectăm termoplonjorul la temperatura*** t = = 50°C **. b)** ***Va ajunge să fiarbă apa dacă lăsăm termoplonjorul mult timp conectat ?***

τ , min	0	1	2	3	4
t , °C	20,0	26,2	31,8	36,8	41,4

5	6	7	8	9	10
45,6	49,3	52,7	55,8	58,5	61,1

Rezolvare. Să calculăm creşterea de temperatură pe minut θ^* în funcţie de temperatură. Luăm două momente alăturate, calculăm creşterea (diferenţa) de temperatură şi o prescriem temperaturii medii a intervalului ales ; obţinem tabelul :

t , °C	23,1	29,0	34,3	39,1	43,5
θ^*, K/min	6,2	5,6	5,0	4,6	4,2

47,45	51,0	54,25	57,15	59,8
3,7	3,4	3,1	2,7	2,6

Creşterea de temperatură pe minut θ^*, reprezentată grafic, se aproximează bine printr-o *dreaptă*. Extrapolând până la intersecţia cu axa temperaturilor, când $\theta^* \to 0$, obţinem imediat temperatura maximă posibilă $t_{max} \approx 85$ °C .

Din grafic se mai vede că pentru t = 50°C apa se încălzeşte cu $\theta^* \cong 3,5$ K/min, iar pentru t_m = 20,0°C (temperatura mediului ambiant) cu $\theta^* \cong 6,5$ K/min .

Vom folosi *legea lui **Newton*** pentru răcirea (sau încălzirea) unui corp *solid* într-un mediu *fluid* (lichid sau gaz) :

Căldura schimbată între solid şi fluid pe unitatea de timp (fluxul de căldură) este proporţională cu aria prin care se face schimbul de căldură şi cu diferenţa de temperatură dintre solid şi mediul fluid :

$$Q^* = KS(t - t_m) . \qquad (1)$$

În cazul problemei noastre puterea calorică P dezvoltată de termoplonjor merge pentru încălzirea apei pe unitatea de timp , $mc\theta^*$, şi pentru încălzirea mediului conform lui (1) :

$$P = mc\theta^* + KS(t - t_m) . \qquad (2)$$

Dacă facem aici $t = t_m$, obţinem

$$P = mc\theta_m^* , \text{ deci } mc(\theta_m^* - \theta^*) = KS(t - t_m) . \qquad (3)$$

Pe de altă parte, dacă deconectăm termoplonjorul, căldura schimbată cu mediu pe unitatea de timp (1) duce la o micşorare a temperaturii apei pe unitatea de timp :

$$Q^* = KS(t - t_m) = mc \cdot (- \Delta t / \Delta\tau) . \qquad (4)$$

Ţinând seama de (3) :

$$mc \cdot (- \Delta t / \Delta\tau) = mc(\theta_m^* - \theta^*) \rightarrow$$

$$- \Delta t / \Delta\tau = \theta_m^* - \theta^* = 3 \text{ grd/min} . \qquad (5)$$

Scăderea de temperatură pe unitatea de timp , $- \Delta t / \Delta\tau$, după deconectarea termoplonjorului, este chiar diferenţa dintre creşterea de temperatură pe unitatea de timp la temperatura mediului, θ_m^* , şi creşterea de temperatură pe unitatea de timp la temperatura la care se face deconectarea termoplonjorului.

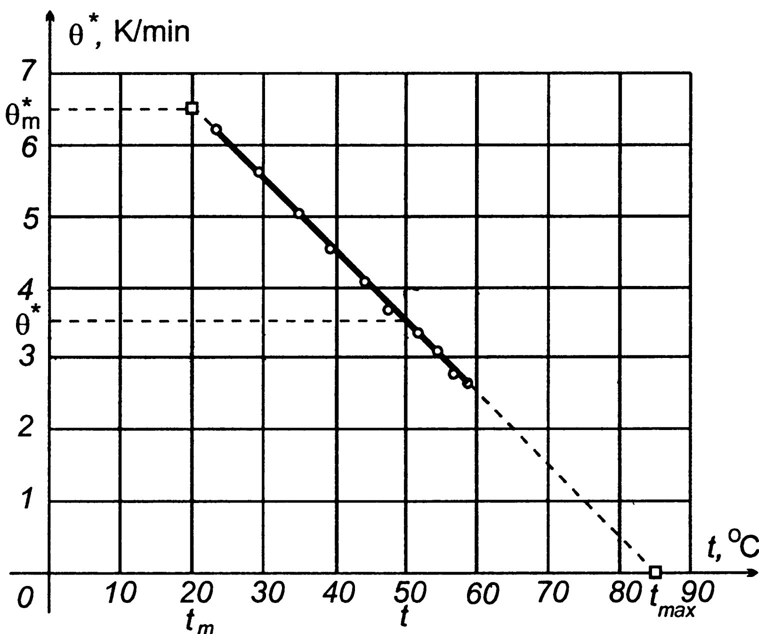


Fig.7.1.8

* * **7.1.9.** ***Temperatura unui termostat de capacitate calorică*** C = 300 J/K ***este menţinută constantă cu*** ΔT = 80 K ***deasupra temperaturii mediului ambiant cu ajutorul unui încălzitor electric de putere*** P= 100 W ***şi randament*** η = 0,80. ***Cu câte grade***

δT ***va coborî temperatura termostatului în timpul*** τ = 5,0 min ***după deconectarea încălzitorului ? Se va ține seama de faptul că un corp solid care se răceşte într-un mediu fluid pierde în unitatea de timp o cantitate de căldură proporțională cu diferența dintre temperatura corpului şi cea a mediului fluid*** **(legea lui Newton).**

Rezolvare. În regim *staționar*:

$$\eta P = \alpha(T_o - T_m)S = \alpha\, \Delta T\, S\,, \qquad (1)$$

unde α este ***coeficientul de schimb de căldură*** dintre termostat şi mediu, S - aria suprafaței prin care se face schimbul de căldură (suprafața termostatului), T_o - temperatura de regim a termostatului, T_m - temperatura mediului.

În timpul răcirii, să considerăm la un moment dat τ un interval infinitezimal de timp $d\tau$ în care temperatura scade cu $-dT$ şi avem bilanțul : căldura pierdută de termostat este pe de o parte $-mcdT$, iar pe de altă parte este dată de *formula lui Newton* :

$$-mcdT = -CdT = \alpha(T - T_m)\, S\, d\tau\,. \qquad (2)$$

Separăm variabilele şi integrăm : $-\int \frac{dT}{T - T_m} = \int \frac{\alpha S}{C} d\tau$,

$$-\ln(T - T_m) = \alpha(S / C)\, \tau + K\,,$$

unde constanta de integrare K se determină din *condiția inițială* : la $\tau = 0$ avem $T = T_o$; $-\ln(T_o - T_m) = K$, deci

$$\ln[(T - T_m)/(T_o - T_m)] = -\alpha(S / C)\, \tau\,,$$

$$T - T_m = (T_o - T_m)\, e^{-\alpha S\tau / C}. \qquad (3)$$

Se poate integra şi *definit* (limitele de integrare se corespund):

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T - T_m} = -\frac{\alpha S}{C}\int_0^{\tau} d\tau\ , \ \ln[(T - T_m) / (T_o - T_m)] = -\alpha(S / C)\, \tau\,,$$

$$T - T_m = \Delta T\, e^{-\eta P\tau / (C\Delta T)} \qquad (4)$$

sau $$\delta T = T_o - T = \Delta T\,(1 - e^{-\eta P\tau / (C\Delta T)})\,. \qquad (5)$$

În cazul problemei (τ = 5,0 min) : $\delta T \cong 5{,}0$ K .

Dacă ar fi $\eta P \tau \ll C\Delta T$, atunci exponențiala s-ar putea aproxima (v. Anexe): $e^x \cong 1 + x\,,$ dacă $|x| \ll 1$, (6)

adică ar fi: $\delta T \cong \eta P \tau / C$ *independent de* ΔT. (7)

7.2. Topirea şi solidificarea

7.2.1. ***Pentru a determina conţinutul de apă în zăpadă umedă, s-a luat o cantitate*** $m_z = 100$ g ***zăpadă umedă şi s-a introdus într-un calorimetru cu echivalentul în apă*** $A = 20$ g, ***conţinând*** $V = 0,60$ L ***apă la temperatura*** $t_a = 12°C$. ***Temperatura finală a devenit*** $\theta = 2,0°C$. ***Aflaţi conţinutul de apă în procente*** *w* % ***din zăpadă umedă.***

Rezolvare. $Q_{prim} = (m_a + A)c_a(t_a - \theta) =$

$$= Q_{ced} = (1 - w)m_z\lambda + m_z c_a\theta, \quad (1)$$

$$w = 1 - [c_a/(m_z\lambda)]\,[(m_a + A)(t_a - \theta) - m_z\theta] = 25\ \%. \quad (2)$$

7.2.2. ***Un calorimetru cu capacitatea calorică*** $C = 83,6$ J/K ***conţine o cantitate*** $m_a = 180$ g ***apă aflată la temperatura*** $t_a = 15°C$. ***Se introduc*** $m_g = 100$ g ***gheaţă aflată la temperatura*** $t_g = -10°C$. ***Aflaţi temperatura finală de echilibru termic.***

Rezolvare. În problemele în care se poate produce *topirea* sau *solidificarea*, este bine să facem în prealabil un *bilanţ* al căldurii disponibile prin răcire sau solidificare, respectiv al căldurii necesare pentru încălzire şi topire.

În cazul problemei, căldura disponibilă prin răcirea apei şi a vasului până la 0°C este

$$Q_{disp} = (m_a c_a + C)t_a = 12,54 \text{ kJ}. \quad (1)$$

Căldura necesară pentru încălzirea gheţii şi topirea ei :

$$Q_{nec} = m_g c_g(-t_g) + m_g\lambda = 2,09 \text{ kJ} + 33,5 \text{ kJ} = 35,6 \text{ kJ}. \quad (2)$$

Se vede imediat că căldura disponibilă este suficientă pentru a încălzi gheaţa până la 0°C şi a topi *numai o parte* din ea. Prin urmare, temperatura finală de echilibru va fi 0°C şi în calorimetru vom avea apă şi gheaţă în echilibru termic. Masa de gheaţă care se va topi :

$$m_g' = [Q_{disp} - m_g c_g(-t_g)] : \lambda_g = 31,2 \text{ g}. \quad (3)$$

7.2.3. ***Într-un calorimetru (de capacitate calorică neglijabilă), conţinând*** $m_a = 2,00$ kg ***apă la temperatura*** $t_a = 6,0°C$, ***se introduc*** $m_g = 2,00$ kg ***gheaţă la temperatura*** $t_g = -20°C$. ***Aflaţi temperatura finală de echilibru termic.***

Rezolvare. Facem bilanțul căldurilor, analog problemei precedente 7.2.2. Căldura disponibilă prin răcirea apei până la 0°C :

$$Q_{disp} = m_a c_a t_a = 50,16 \text{ kJ} . \quad (1)$$

Căldura necesară gheții pentru a se încălzi până la 0°C :

$$Q_{nec} = m_g c_g(-t_g) = 89,6 \text{ kJ}. \quad (2)$$

Aceasta înseamnă că apa se răceşte până la 0°C, dar căldura cedată nu este suficientă gheții ca să ajungă la 0°C. Atunci va începe să înghețe apa, astfel încât căldura latentă eliberată să aducă gheața la 0°C. Pentru aceasta este nevoie să înghețe :

$$m_a' = (Q_{nec} - Q_{disp}) : \lambda_g = 0,10 \text{ kg} . \quad (3)$$

Deci, temperatura de echilibru va fi 0°C şi vom avea gheață inițială adusă la 0°C şi apa inițială adusă la 0°C din care o parte m_a' îngheață .

7.2.4. ***Într-un calorimetru cu echivalentul în apă*** A = 50 g, ***conținând*** m_a = 250 g ***apă la temperatura inițială*** t_a = 10°C, ***se introduce o masă*** m = 300 g ***cupru, scoasă dintr-un vas cu azot lichid. Aflați temperatura finală de echilibru termic.***

Rezolvare. Căldura necesară cuprului ca să ajungă la 0°C :

$$Q_{nec} = mc(-t) = 16,46 \text{ kJ} ; \quad c = 280 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} , \ t = -196^oC. \quad (1)$$

Căldura disponibilă prin răcirea calorimetrului cu apă :

$$Q_{disp} = (m_a + A)c_a t_a = 12,54 \text{ kJ} . \quad (2)$$

Se vede că această căldură nu este suficientă, de aceea va începe înghețarea apei. Masa de apă care trebuie să înghețe :

$$m_g = (Q_{nec} - Q_{disp}) : \lambda = 11,7 \text{ g} . \quad (3)$$

Prin urmare, temperatura finală de echilibru va fi 0°C şi va îngheța o parte m_g din apă.

7.2.5. ***Un cilindru este umplut până la o înălțime*** h = 25 cm ***cu gheață, peste care se toarnă o coloană de aceeaşi înălțime de apă la temperatura*** t_a = 10°C. ***După stabilirea echilibrului termic nivelul apei a urcat cu*** Δh = 0,50 cm. ***Aflați temperatura inițială a gheții.***

Rezolvare. Dacă nivelul apei a crescut înseamnă că o parte din apă a înghețat. Ecuația calorimetrică dă :

$$Q_{ced} = m_a c_a t_a + m_a' \lambda_g = Q_{prim} = m_g c_g(-t_g) , \quad (1)$$

$$\rho_a S h c_a t_a + m_a' \lambda_g = \rho_g S h c_g(-t_g) , \quad (2)$$

dar $\Delta V = S\Delta h = m_a'/\rho_g - m_a'/\rho_a = m_a'(\rho_a - \rho_g)/(\rho_a \rho_g)$. (3)

$$\rho_a h c_a t_a + \Delta h \, \lambda_g \cdot (\rho_a \rho_g)/(\rho_a - \rho_g) = \rho_g h c_g(-t_g) , \quad (4)$$

$t_g = - t_a (c_a / c_g) \rho_a / \rho_g - (\lambda_g / c_g)(\Delta h / h) \rho_a / (\rho_a - \rho_g) = - 54^oC$. (5)

7.2.6. ***Într-un balon închis de volum*** V = 24,9 L, ***conținând*** m = 4,0 g He ***la presiunea atmosferică normală, se introduce*** m_g = 1,00 g ***gheață aflată la*** 0°C. ***Care va fi presiunea finală a heliului ?***

Rezolvare. Căldura necesară gheții ca să se topească :

$$Q_{nec} = m_g\lambda_g = 335 \text{ J} . \quad (1)$$

Căldura disponibilă de la răcirea izocoră a heliului până la 0°C :

$$Q_{disp} = (m / \mu)C_v(T - T_o) = (m / \mu)(3R / 2) (T - T_o) =$$
$$= (3/2)pV - (3/2)(m / \mu)RT_o = 384,7 \text{ J} . \quad (2)$$

Prin urmare, se va topi toată gheața. *Ecuația calorimetrică* dă :

$$Q_{ced} = (m / \mu)C_v(T - T') = (C_v / R)(p_oV - pV) =$$
$$Q_{prim} = m_g\lambda_g + m_gc_a(T' - T_o) = m_g\lambda_g + m_gc_a[\mu pV / (mR) - T_o] , \quad (3)$$

de unde rezultă presiunea cerută :

$$p =[p_oC_v / R +m_g(c_aT_o- \lambda_g) / V] :[C_v / R + \mu m_gc_a / (mR)] = 90 \text{ kPa}.(4)$$

(Presiunea vaporilor saturanți ai apei este neglijabilă.)

7.2.7. ***Într-un vas cu apă plutește o bucată de gheață având în interior înghețată o bilă de plumb. Masa gheții*** m_g = = 1,40 kg, ***masa bilei*** m = 0,100 kg, ***temperatura sistemului*** 0°C. ***Ce cantitate minimă de căldură trebuie transmisă sistemului pentru ca bila sigur să înceapă să se scufunde ?***

Rezolvare. Considerăm cazul limită al plutirii bilei încorporată în gheață : $m_g' + m = \rho_a m_g'/ \rho_g + \rho_a m / \rho_{Pb} \rightarrow$

$$m_g' = m (1 - \rho_a / \rho_{Pb}) : (\rho_a / \rho_g - 1) . \quad (1)$$

Atunci căldura necesară : $Q = \lambda_g(m_g - m_g') =$

$$= \lambda_g [m_g - m (1 - \rho_a / \rho_{Pb}) : (\rho_a / \rho_g - 1)] = 134 \text{ kJ} . \quad (2)$$

7.2.8. ***Într-un calorimetru de alamă de masă*** m_c = 100 g ***se află o bucată de gheață de masă*** m_g = 0,40 kg ***la temperatura*** t_g = - 10°C. ***Peste gheață se toarnă o masă*** m_{Pb} = 0,20 kg ***plumb topit la temperatura sa de topire. Aflați temperatura finală de echilibru.***

Rezolvare. Căldura necesară calorimetrului cu gheață pentru a se încăzi până la 0°C :

$$Q_{nec} = (m_cc_c + m_gc_g)(- t_g) = 8,77 \text{ kJ} . \quad (1)$$

Căldura cedată de plumb prin solidificare și răcire până la 0°C :

$$Q_{disp} = m_{Pb}\lambda_{Pb} + m_{Pb}c_{Pb}t_{Pb} = 13{,}5 \text{ kJ} > Q_{nec} . \quad (2)$$

Prin urmare, mai rămâne căldură disponibilă pentru a topi o parte din gheață : $m_g' = (Q_{disp} - Q_{nec}) / \lambda_g = 14{,}1$ g , (3)

deci temperatura finală de echilibru va fi 0^oC şi în calorimetru va fi apă, gheață şi plumb în echilibru termic.

7.2.9. ***Apa pură poate fi subrăcită până la*** $t = -10^oC$ ***fără a îngheța. Este însă suficient să aruncăm în ea o fărâmă de gheață pentru a provoca înghețarea rapidă a unei părți din apă şi revenirea temperaturii la*** 0^oC. ***Cât la sută din masa apei astfel subrăcite va îngheța ? Căldura specifică a apei subrăcite este apropiată de căldura specifică a apei la*** 0^oC .

Rezolvare. Pentru revenirea temperaturii la 0^oC este necesară căldura $mc_a(-t)$, care se obține prin înghețarea unei părți din apă, $m_g\lambda_g$, deci $mc_a(-t) = m_g\lambda_g \rightarrow m_g / m = -c_a(-t)/\lambda_g = 12{,}5\%$.

7.2.10. ***Cu anumite precauții apa (pură) poate fi subrăcită sub*** 0^oC ***fără a îngheța sau supraîncălzită peste*** 100^oC ***fără a fierbe. Într-un calorimetru de capacitate calorică*** $q = 1{,}035$ kJ/K ***se află*** $m_1 = 1{,}00$ kg ***apă subrăcită până la*** $t_1 = -10^oC$. ***Se introduce o cantitate*** $m_2 = 0{,}100$ kg ***apă supraîncălzită până la*** $t_2 = 110^oC$. ***Ce temperatură de echilibru se va stabili în calorimetru ?***

Rezolvare. Facem în prealabil un bilanț al căldurilor. Căldura necesară apei subrăcite şi calorimetrului pentru a ajunge la 0^oC :

$$Q_{nec} = (m_1c_a + q)(-t_1) = 52{,}68 \text{ kJ} , \quad c_a = 4233 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} , \quad (1)$$

Căldura disponibilă, cedată de apa supraîncălzită pentru a ajunge la 0^oC : $Q_{disp} = m_2c_at_2 = 45{,}98$ kJ , $c_a = 4180$ J/(kg · K), (2)

deci această căldură nu ajunge apei subrăcite să ajungă la 0^oC. Atunci o parte din apa subrăcită va îngheța pentru a elibera căldura latentă : $m_g = (Q_{nec} - Q_{disp}) / \lambda_g = 20$ g (3)

şi temperatura finală de echilibru va fi 0^oC, în calorimetru va fi apă şi gheață m_g în echilibru termic .

7.2.11. ***Într-o cameră s-a adus un vas cu apă rece. După*** $\tau_1 = 10$ min ***apa s-a încălzit cu*** $\Delta t = 1{,}0^oC$. ***Să se evalueze în cât timp*** τ_2 ***se va topi în aceeaşi cameră şi în acelaşi vas o masă egală de gheață la*** 0^oC .

Rezolvare. Conform *legii lui* ***Newton***, de răcire sau încălzire a unui corp solid într-un mediu fluid, căldura schimbată pe unitatea de

timp dintre corp şi mediu este proporţională cu aria suprafeţei prin care se face schimbul de căldură şi cu diferenţa de temperatură dintre solid şi mediul fluid.

În cazul nostru afluxul de căldură spre vas în unitatea de timp, rămâne practic *acelaşi* (*acelaşi* vas, *aceeaşi* cameră, practic aceeaşi diferenţă de temperatură) :

$$\Phi = mc\Delta t / \tau_1 = m\lambda / \tau_2 \rightarrow \quad \tau_2 = \tau_1 \cdot \lambda / (c\Delta t) = 13 \text{ h } 20 \text{ min}.$$

7.2.12. ***Pentru a determina căldura latentă de topire a bromului a cărui căldură specifică în stare lichidă este*** $c = 440$ J/(kg · K) ***, s-a luat un vas de capacitate calorică*** $q = 36$ J/K ***în care s-a introdus o masă*** $m = 100$ g ***brom solid. Topirea a durat*** $\tau_1 = 5,5$ h, ***după care temperatura a urcat cu*** $\Delta t = 2,0^oC$ ***într-un timp*** $\tau_2 = 8,0$ min. ***Aflaţi căldura latentă de topire a bromului.***

Rezolvare. Conform *legii lui Newton* (v. problema precedentă 7.2.11) afluxul de căldură, în unitatea de timp, dinspre mediul ambiant către vas, este practic *constant* în timpul experienţei, diferenţa de temperatură dintre mediu şi vas fiind practic *aceeaşi* :

$$\Phi = m\lambda / \tau_1 = (mc + q)\Delta t / \tau_2 , \qquad \lambda = (c + q / m)\, \Delta t \cdot \tau_1 / \tau_2 = 66 \text{ kJ/kg}$$

7.2.13. ***Într-un vas, în care trebuie menţinută temperatura constantă (termostat), s-a introdus o masă*** m ***de naftalină, din care o fracţiune*** f ***este în stare lichidă. Se toarnă în termostat o masă*** M ***de apă. Între ce limite poate fi cuprinsă temperatura apei, pentru ca temperatura din termostat să nu se schimbe ?***

Aplicaţie. *Temperatura de topire a naftalinei* $\theta = 80^oC$, *căldura latentă de topire a naftalinei* $\lambda = 151$ kJ/kg, $f = 1/2$, $m = 1,00$ kg , $M = 2,00$ kg .

Rezolvare. În cazul temperaturii *minime* a apei, va îngheţa naftalina lichidă pentru a aduce temperatura apei la $\theta = 80^oC$:

$$f m\, \lambda = Mc(\theta - t_1)\, , \quad t_1 = \theta - f m \lambda / (Mc) = 71^oC . \qquad (1)$$

În cazul temperaturii *maxime*, se va topi naftalina solidă pentru a răci apa la $\theta = 80^oC$:

$$(1 - f)m\, \lambda = Mc(t_2 - \theta), \qquad t_2 = \theta + (1 - f)m\, \lambda / (Mc) = 89^oC . \qquad (2)$$

Prin urmare, pentru oricare temperatură iniţială a apei $\in (71,\ 89)\ ^oC$, termostatul va asigura temperatura $\theta = 80^oC$.

7.2.14. ***Un vas calorimetric de capacitate calorică*** $C = 200$ J/K ***conţine o masă*** m_a ***de apă la temperatura*** $t_a = 20^oC$. ***Se introduce apoi o masă*** $m_g = 1,00$ kg ***gheaţă la temperatura*** $t_g =$

$= -10^oC$ ***şi o masă*** $m_c = 100$ g ***de cupru la temperatura*** $t_c =$ $= 100^oC$. ***Ştiind că temperatura finală de echilibru este*** 0^oC, ***aflaţi masa iniţială*** m_a ***de apă .***

Rezolvare. Întrucât gheaţa şi apa pot coexista în echilibru termic la 0^oC în orice proporţie, rezultă că masa de apă m_a poate lua orice valoare într-un anumit interval şi anume între m_{min} când nu se topeşte gheaţă deloc şi m_{max} când toată gheaţa se va topi .

$$Q_{ced} = m_c c_c t_c + (m_{min} c_a + C)t_a = Q_{prim} = m_g c_g(-t_g), \quad (1)$$

$$m_{min} = [m_g c_g(-t_g) - m_c c_c t_c - C t_a] : (c_a t_a) = 155 \text{ g}. \quad (2)$$

În celălalt caz :

$$Q'_{ced} = m_c c_c t_c + (m_{max} c_a + C)t_a = Q'_{prim} = m_g c_g(-t_g) + m_g \lambda_g, \quad (3)$$

$$m_{max} = [m_g c_g(-t_g) + m_g \lambda_g - m_c c_c t_c - C t_a] : (c_a t_a) =$$

$$= m_{min} + mg \cdot \lambda_g / (c_a t_a) = 4{,}01 \text{ kg}. \quad (4)$$

7.2.15. ***Într-un congelator s-a introdus o cantitate de apă la temperatura*** $t_1 = 8{,}0^oC$ ***şi s-a observat că după*** $\tau_1 = 4{,}0$ min ***temperatura apei a scăzut la*** $t_2 = 4{,}0^oC$. ***Evaluaţi cât timp trebuie să mai treacă pentru ca toată apa să îngheţe .***

Rezolvare. Considerăm că viteza de evacuare a căldurii din camera congelatorului este practic *constantă* , deci

$$\Phi = mc(t_1 - t_2)/\tau_1 = (mct_2 + m\lambda)/\tau_2 \rightarrow$$

$$\tau_2 = \tau_1 \cdot (ct_2 + \lambda)/[c(t_1 - t_2)] = 1 \text{ h } 24 \text{ min}.$$

*

7.3. Vaporizarea şi condensarea

7.3.1. ***Într-un cilindru de înălţime*** h = 50 cm ***fierbe apa la presiunea atmosferică* normală. *Care este temperatura apei la fundul cilindrului ?***

Rezolvare. Conform *legii a doua* a fierberii, lichidul fierbe la acea temperatură la care presiunea vaporilor săi saturanţi devine egală cu presiunea exterioară. Fierberea înseamnă vaporizare care are loc în întregul volum al lichidului prin formarea de bule în interiorul cărora sunt vaporii saturanţi ai lichidului. Presiunea acestor vapori saturanţi în interiorul bulei trebuie să fie egală cu presiunea exterioară, şi anume : presiunea atmosferică H plus presiunea hidrostatică a coloanei de lichid de deasupra bulei, altfel bula nu se poate forma sau urcă imediat şi se sparge. Prin urmare,

$$p_s = H + \rho g h = 101{,}3\ \text{kPa} + 5{,}0\ \text{kPa} = 106{,}3\ \text{kPa}\ , \qquad (1)$$

la această presiune corespunde o temperatură (după *Tabele*) : $t_f \cong 101^oC$.

7.3.2. ***Într-un calorimetru cu apă la temperatura*** $t_a = 20^oC$ ***se aruncă un manşon de fier de aceeaşi masă cu apa. În starea finală de echilibru nivelul apei a revenit la nivelul iniţial. Aflaţi temperatura iniţială a fierului. Se neglijează dilatările termice.***

Rezolvare. Temperatura fierului trebuie să fie mai mare decât temperatura de fierbere a apei, pentru ca prin fierbere să se vaporizeze un volum de apă egal cu volumul fierului (atunci nivelul apei poate reveni la nivelul iniţial):

$$Q_{ced} = mc_{Fe}(t_{Fe} - t_f) = Q_{prim} = mc_a(t_f - t_a) + \rho_a(m / \rho_{Fe})\,\lambda\ , \qquad (1)$$

$$t_{Fe} = t_f + (c_a / c_{Fe})\,(t_f - t_a) + (\rho_a / \rho_{Fe})(\lambda / c_{Fe}) = 886^oC\ . \qquad (2)$$

7.3.3. ***Într-un vas calorimetric de alamă de masă*** m_c= 200 g ***se află un volum*** V_a = 1,00 L ***apă şi o masă*** m_g = 400 g ***de gheaţă în echilibru termic. În apa din vas se introduc*** m_v = 100 g ***vapori de apă la temperatura de fierbere*** t = 100°C. ***Care va fi temperatura finală de echilibru ?***

Rezolvare. Facem în prealabil un **bilanţ** al căldurilor :

Căldura necesară gheţii pentru topire :

$$Q_{nec} = m_g \lambda_g = 134 \text{ kJ} . \quad (1)$$

Căldura disponibilă pe care o pot da vaporii prin condensare şi răcire până la 0°C : $Q_{disp} = m_v \lambda_v + m_v c_a t = 267{,}5$ kJ. (2)

Prin urmare, se va topi toată gheaţa şi temperatura finală va fi $\theta > 0$. Acum *ecuaţia calorimetrică* ne dă :

$$m_v \lambda_v + m_v c_a(t - \theta) = m_g \lambda_g + [(m_a + m_g)c_a + m_c c_c]\,\theta , \quad (3)$$

$$\theta = [m_v (\lambda_v + c_a t) - m_g \lambda_g] : [m_c c_c + (m_a + m_g + m_v)c_a] = 21^oC . \quad (4)$$

7.3.4. ***Într-un calorimetru se află în echilibru termic mase egale de apă şi gheaţă. Se trece prin amestec o masă egală de vapori de apă la temperatura de fierbere*** t_f = 100°C. ***Aflaţi temperatura finală de echilibru termic .***

Rezolvare. Facem în prealabil un *bilanţ* al căldurilor :

Căldura necesară amestecului de apă şi gheaţă pentru a ajunge la fierbere (t_f) :

$$Q_{nec} = m \lambda_g + 2mct_f = 1171\ m \text{ , kJ} . \quad (1)$$

Căldura disponibilă, cedată de vapori prin condensare :

$$Q_{disp} = m \lambda_v = 2257\ m \text{ , kJ} . \quad (2)$$

Prin urmare, temperatura finală va fi $\theta = t_f$ = 100°C şi se va condensa numai o parte din vapori : $m_v' = Q_{nec} / \lambda_v = 0{,}52\ m$. (3)

7.3.5. ***O piesă de oţel de masă*** m = 2,00 kg ***este scoasă dintr-un cuptor cu temperatura*** t = 1000°C ***şi aruncată (pentru călire) într-un vas de capacitate calorică*** C = 220 J/K ***conţinând*** m_a = 1,00 kg ***apă la temperatura*** t_a = 20°C. ***Care va fi temperatura finală a apei ?***

Rezolvare. Deoarece este posibilă atingerea temperaturii de *fierbere*, care nu poate fi depăşită (la presiunea atmosferică dată), să evaluăm căldura necesară apei şi vasului ca să ajungă la temperatura de fierbere şi căldura disponibilă de la piesa de oţel ca să se răcească până la t_f :

$$Q_{nec} = (m_a c_a + C)(t_f - t_a) = 352 \text{ kJ} , \quad (1)$$

$$Q_{disp} = mc(t - t_f) = 1152 \text{ kJ} , \quad (c = 640 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}), \quad (2)$$

rezultă imediat că se atinge temperatura de fierbere. Apa încetează să fiarbă după vaporizarea masei :

$$m_v = (Q_{disp} - Q_{nec}) / \lambda = 0{,}35 \text{ kg} . \quad (3)$$

După aceasta temperatura amestecului din calorimetru va coborî lent (după calitatea izolării termice a vasului calorimetric).

7.3.6. ***Într-un vas calorimetric de alamă, de masă*** m_c = 200 g, ***conținând*** m_a = 1,00 kg ***apă în echilibru termic cu*** m_g = 0,50 kg ***gheață, se toarnă*** m_{Sn} = 10,0 kg ***cositor topit la temperatura*** t_{Sn} = 252°C . ***Calculați masa de apă ce se va vaporiza atunci când se atinge starea finală de echilibru termic.***

Rezolvare. Facem un *bilanț* al căldurilor. Căldura *necesară* gheții, apei și vasului ca să ajungă la temperatura de fierbere a apei:

$$Q_{nec} = m_g\lambda_g + (m_a + m_g)c_a t_f + m_c c_c t_f = 868{,}5 \text{ kJ} . \quad (1)$$

Căldura *disponibilă*, cedată de cositor prin răcire și solidificare, până la t_f = 100°C :

$$Q_{disp} = m_{Sn}c_{Sn\ lich.}(t - t_t) + m_{Sn}\lambda_{Sn} + m_{Sn}c_{Sn}(t_t - t_f) = 940{,}6 \text{ kJ} . \quad (2)$$

Prin urmare, apa ajunge la fierbere. Până la încetarea fierberii se vaporizează : $m_v = (Q_{disp} - Q_{nec}) / \lambda_v = 32$ g . (3)

7.3.7. ***Într-un vas, cu echivalentul în apă*** A = 110 g, ***conținând*** m_a = 3,00 kg ***apă la temperatura*** t_a = 17°C, ***se aruncă o bucată de oțel de masă*** m = 3,00 kg ***încălzită la temperatura*** t = = 550°C. ***Temperatura finală a apei a devenit*** θ = 50°C . ***Ce masă de apă*** m_v ***s-a vaporizat prin contactul cu corpul fierbinte ?***

Rezolvare. *Ecuația calorimetrică* se scrie : $Q_{ced} = mc(t - \theta) =$

$$= Q_{prim} = (m_a + A)c_a(\theta - t_a) + m_v c_a(t_f - \theta) + m_v\lambda_v , \quad (1)$$

$$m_v = [mc(t - \theta) - (m_a + A)c_a(\theta - t_a)] : [c_a(t_f - \theta) + \lambda_v] = 0{,}10 \text{ kg} . \quad (2)$$

7.3.8. ***Una din metodele de răcire este și metoda evaporării forțate sau intensive. Vasul cu lichidul se așază sub un clopot de sticlă din care se evacuează aerul și vaporii (mașina pneumatică). Calculați fracțiunea din masa inițială de apă, luată la*** 0°C, ***care poate fi înghețată prin acest procedeu .***

Rezolvare. Căldura necesară evaporării, $m_v\lambda_v$ (λ_v trebuie luat la 0°C), se obține prin înghețarea restului apei, $m_g\lambda_g$, deci

$$m_g\lambda_g = (m - m_g)\lambda_v \quad , \quad m_g / m = \lambda_v / (\lambda_g + \lambda_v) = 88\ \% .$$

7.3.9. ***După timpul*** τ_1 = 40 min ***de la începutul fierberii supei gospodina a completat oala, cu apă rece, până la nivelul inițial și a observat că după alte*** τ_2 = 6,0 min ***apa a început să fiarbă din nou. Care a fost temperatura*** t_r ***a apei adăugate ?***

Rezolvare. Considerăm că afluxul de căldură de la plită spre vas este practic *constant* (nu se umblă la robinetul plitei, nu se schimbă practic temperatura în cameră, etc.), atunci notând cu m_v masa de apă vaporizată : $\Phi = m_v \lambda_v / \tau_1 = m_v c(t_f - t_r) / \tau_2$,

$$t_r = t_f - (\lambda_v / c) \cdot \tau_2 / \tau_1 = 19^oC .$$

7.3.10. ***Într-un vas metalic, într-un anumit interval de timp, se topesc*** $m_g = 40$ g ***gheață la*** 0^oC , ***temperatura mediului ambiant fiind*** $t_m = 20^oC$. ***Introducând (în locul gheții) azot lichid, aflați ce masă de azot se va vaporiza în același interval de timp.***

Rezolvare. Conform *legii lui* ***Newton***, căldura schimbată pe unitatea de timp între un solid şi mediul ambiant fluid este proporțională cu diferența de temperatură dintre corp şi fluid. Prin urmare, afluxul de căldură dinspre cameră spre vas este proporțional cu diferența de temperatură , deci putem scrie :

$$Q_g = m_g \lambda_g = k\, t_m\, \tau , \qquad Q_N = m_N \lambda_N = k(t_m - t_N)\, \tau . \qquad (1)$$

Prin împărțirea ecuațiilor membru la membru, obținem

$$m_N \lambda_N / m_g \lambda_g) = (t_m - t_N) / t_m ,$$

$$m_N = m_g\, (\lambda_g / \lambda_N)\, (t_m - t_N) / t_m = 725 \text{ g.} \qquad (2)$$

7.3.11. ***Într-un cilindru cu secțiunea*** $S = 1{,}00$ dm^2 ***, sub un piston de masă neglijabilă, se află o masă*** m = 10,0 g ***apă în condiții*** **normale.** ***a) Care este volumul molar al apei (lichide) în condiții*** **normale** ***? b) La ce înălțime se ridică pistonul dacă transmitem apei o căldură*** Q = 10,0 kJ ***?***

Rezolvare. a) $V_{\mu o} = \mu / \rho_o = 18$ cm^3/mol = 0,018 L/mol = $=18 \cdot 10^{-6}$ m^3/mol. Atragem atenția că volumul molar (adică volumul unui *mol* de substanță) al ***solidelor*** şi ***lichidelor*** ***diferă*** de la substanță la substanță , fiind egal cu masa ***molară*** (adică masa unui mol) împărțită la *densitatea* substanței, în condițiile respective de presiune şi temperatură. Spre deosebire de solide şi lichide, la ***gazele ideale*** volumul molar în *aceleaşi* condiții de temperatură şi presiune este *acelaşi*, independent de natura gazului. Dacă aceste condiții sunt cele *normale*, atunci volumul molar al gazelor, în C.N., este o constantă a fizicii : $V_{\mu o} = 22{,}41$ NL/mol (NL - normal-litru). În problemă s-a cerut volumul molar al ***apei*** *lichide* .

b) Căldura necesară apei ca să ajungă la fierbere :

$$Q_{nec} = mct_f = 4{,}18 \text{ kJ} < Q = 10{,}0 \text{ kJ} , \qquad (1)$$

deci o parte din apă se va vaporiza. Prezența pistonului face ca o parte din căldură (energia cinetică a mişcării haotice a moleculelor)

să se consume în lucrul mecanic de destindere (mişcare ordonată a moleculelor) împotriva forței de presiune exterioare (restul căldurii transmise merge pentru ruperea legăturilor dintre molecule).

Volumul specific (volumul unității de masă, adică *inversul* densității) al vaporilor de apă la presiunea normală şi temperatura t_f = 100°C este $v = RT_f / (\mu p_o) = 1,7\ m^3/kg$, (2)

ceea ce puteam calcula şi cu ajutorul densității vaporilor *saturanți* $\rho_s(t_f) = 0,60\ kg/m^3$; $v = 1 / \rho_s = 1,67\ m^3/kg$. (3)

Lucrul mecanic efectuat la formarea vaporilor, împotriva forței de presiune atmosferică, pe unitatea de masă :

$L^* = p\Delta V / m = 168\ kJ/kg$. (4)

Pe de altă parte, căldura latentă de vaporizare : $\Lambda_v = 2257$ kJ/kg. Într-o primă aproximație lucrul mecanic (4) se poate neglija.

$Q = mct_f + m_v \lambda_v + p_o m_v v$, (5)

$m_v = (Q - mct_f) / (\lambda_v + p_o v) = 2,4\ g$, (6)

$h = m_v / (\rho_s S) = 40,3\ cm$. (7)

7.3.12. ***Aflați viteza cu care ies aburii prin ciocul ceainicului de arie*** S = 1,0 cm² ***în care fierbe apa la presiunea atmosferică normală, încălzită cu un reşou de putere*** P = 2,0 kW ***cu randamentul*** η = 50 % .

Rezolvare. Fracțiunea $\eta = 0,50$ din puterea încălzitorului este preluată de apă pentru vaporizarea masei în unitatea de timp:

$\Delta m_v / \Delta t = \rho_s S v$, deci

$\eta P = (\Delta m_v / \Delta t)\, \lambda_v = \rho_s S v\, \lambda_v$, $\rho_s = \mu p_s / (RT_f)$, (1)

unde densitatea vaporilor saturanți se poate calcula (ştiind $p_s = p_o = 101,3$ kPa) sau se poate lua din *Tabele* (v. Anexe) .

$v = \eta P\, RT_f / (\mu p_s S\, \lambda_v) = 7,6\ m/s$. (2)

7.3.13. ***Calculați căldura necesară formării unei bule de vapori de apă de rază*** r = 1,0 mm ***la adâncimea*** h = 1,00 m ***, presiunea atmosferică fiind normală.***

Rezolvare. Saltul de presiune la traversarea stratului superficial al bulei (*Laplace*) este neglijabil : $2\sigma / r \approx 120$ Pa « $p_o = 101,3$ kPa. De asemenea, schimbarea presiunii vaporilor *saturanți* deasupra stratului superficial *curbat* (***Kelvin***) este neglijabilă :

$[\rho_s / (\rho_\ell - \rho_s)] \cdot 2\sigma / r \approx (\rho_s / \rho_\ell) \cdot 2\sigma / r \approx 0,07$ Pa ($\rho_s = 0,60\ kg/m^3$).

Neglijând aceste diferențe de presiune, putem spune că presiunea vaporilor saturanți din bulă, conform *legii II a* **fierberii**, egalează

presiunea atmosferică plus presiunea hidrostatică a stratului de apă de deasupra :

$$p_s = H + \rho g h = 101{,}3 \text{ kPa} + 9{,}8 \text{ kPa} = 111{,}1 \text{ kPa}. \quad (1)$$

La această presiune corespunde temperatura t_f = 102,6°C.

Masa vaporilor saturanți din bulă :

$$m_s = \rho_s V = [\,\mu p_s / (RT_f)] \cdot 4\pi r^3 / 3 = 2{,}6 \ \mu g \ . \quad (2)$$

Căldura necesară se compune din căldura latentă de vaporizare plus lucrul mecanic de expansiune a vaporilor saturanți împotriva presiunii exterioare $H + \rho g h = p_s$ şi din energia necesară formării stratului superficial :

$$Q = m_s\lambda_v + p_s V + \sigma S = 5{,}87 \text{ mJ} + 0{,}46 \text{ mJ} + 0{,}74 \ \mu J \ . \quad (3)$$

Se vede rolul celor trei contribuții la formarea bulei de vapori.

7.3.14. ***Într-un vas se toarnă un strat de tetraclorură de carbon*** CCl_4 ***peste care un strat de apă. La presiunea atmosferică normală*** CCl_4 ***fierbe la*** 76,7°C. ***La ce temperatură începe fierberea la*** **interfața** ***dintre cele două lichide ? Folosiți Tabelul vaporilor saturanți :***

t, °C	20	30	40	50	60	70	80
CCL_4,kPa	10,66	17,33	26,66	42,66	61,33	81,99	109,32
H_2O, kPa	2,40	4,27	7,33	12,40	20,00	31,20	47,33

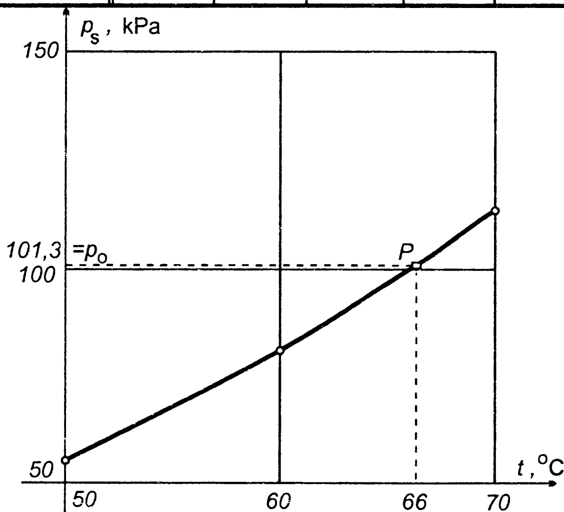


Fig.7.3.14

Rezolvare. La interfața lichidelor se formează bule cu vapori saturanți ai *ambelor* lichide, fiecare cu presiunea sa parțială de vapori saturanți. De aceea formăm Tabelul presiunii amestecului de vapori saturanți la diferite temperaturi :

t, °C	50	60	70	80
$CCl_4 + H_2O$, kPa	55,06	81,33	113,19	156,65

Am reprezentat grafic acest tabel. Se vede din grafic că presiunea atmosferică (101,3 kPa) a vaporilor saturanți din bulele formate la *interfața* lichidelor se obține la temperatura ≈ 66°C, la care deci va începe fierberea la interfața lichidelor.

* * **7.3.15.** ***O masă*** m_a ***de apă aflată la temperatura inițială*** $t_o =$ $= 20$°C ***este răcită prin evaporarea a*** $m_o = 0{,}10$ kg ***eter aflat la aceeaşi temperatură inițială. Aflați :*** **a)** ***Cum variază masa*** m ***a eterului în funcție de temperatura comună*** T ***a apei şi eterului.*** **b)** ***Ce masă maximă de apă poate fi înghețată prin evaporarea totală a eterului .***

Rezolvare. a) Pentru evaporarea unei cantități *infinitezimale* $|dm| = -dm$ de eter este nevoie de căldură latentă de vaporizare , $-dm\,\Lambda$, care este furnizată prin răcirea apei şi eterului cu $|dT| =$ $= -dT$, astfel încât avem *bilanțul* căldurilor pentru acest proces **elementar** de vaporizare :

$$-dm\,\Lambda = -(m_a c_a + mc)\,dT . \qquad (1)$$

Separăm variabilele şi integrăm : $\displaystyle\int \frac{dm}{m_a c_a + mc} = \int \frac{dT}{\Lambda}$,

$$(1/c)\ln(m_a c_a + mc) = T/\Lambda + C , \qquad (2)$$

unde constanta de integrare C se determină din *condiția inițială* ca la $t = t_o$ să avem masa eterului $m = m_o$, deci

$$(1/c)\ln(m_a c_a + m_o c) = T_o/\Lambda + C ,$$

astfel încât $\quad (1/c)\ln[(m_a c_a + mc)/(m_a c_a + m_o c)] = (t - t_o)/\Lambda, \quad (3)$

de unde $\quad m = (m_o + m_a c_a/c)\,e^{-(t_o - t)c/\Lambda} - m_a c_a/c , \;\; 0 < t \le t_o \quad (4)$

(până în momentul înghețării) .

Se poate integra şi *definit* (limitele de integrare se corespund) :

$\displaystyle\int_{m_o}^{m} \frac{dm}{m_a c_a + mc} = \int_{t_o}^{t} \frac{dT}{\Lambda}$, adică

$$(1/c)\ln[(m_a c_a + mc)/(m_a c_a + m_o c)] = (t - t_o)/\Lambda ,$$

Dacă $(t_0 - t)c / \Lambda \ll 1$, exponențiala se poate aproxima :

$$e^x \cong 1 + x , \quad \text{dacă} \quad |x| \ll 1 ; \qquad (5)$$

$$m = m_0 - (1 / \Lambda) (m_a c_a + m_0 c) (t_0 - t) . \qquad (6)$$

b) Aflăm din formula de mai sus masa de eter rămasă în momentul când se atinge $t = 0^oC$:

$$m_r = (m_0 + m_a c_a / c) e^{-t_0 c/\Lambda} - m_a c_a / c , \qquad (7)$$

Prin evaporarea acestei mase de eter trebuie să înghețăm toată apa m_a , deci $m_a \lambda = m_r \Lambda$,

$$m_a = m_0 e^{-t_0 c/\Lambda} : [\lambda / \Lambda + (1 - e^{-t_0 c/\Lambda}) c_a / c] . \qquad (8)$$

Dacă $t_0 c / \Lambda \ll 1$, putem aproxima exponențiala şi obținem :

$$m_a = m_0 (\Lambda - t_0 c) : (\lambda + t_0 c_a) . \qquad (9)$$

În cazul problemei $t_0 c / \Lambda = 0,09$ şi avem aproximativ cu formula de mai sus $m_a = 86$ g, în timp ce calculul cu formula exactă dă $m_a = 88$ g .

*

7.4. Căldura şi energia mecanică

7.4.1. ***Pe platforma orizontală a unui cărucior de masă*** m_2 ***se află un corp prismatic de masă*** m_1. ***Între cărucior şi teren (şine) frecarea este neglijabilă. În corpul*** m_1 ***nimereşte un glonț de masă*** m, ***care se mişca orizontal cu viteza*** v_0 . ***Aflați cantitatea totală de căldură degajată prin frecare dintre corpul*** m_1 ***şi platformă.***

Aplicație. $m_2 = 4,00$ kg , $m_1 = 990$ g, m = 10,0 g , $v_0 = 500$ m/s .

Rezolvare. Legea de ***conservare a impulsului*** la ciocnirea *plastică* (total *inelastică*) (m , m_1) dă : $mv_0 = (m + m_1)v$. (1)

Cu această viteză, corpul format $(m + m_1)$ ciocneşte căruciorul :

$$(m + m_1)v = (m + m_1 + m_2) v' , \qquad (2)$$

unde v' este viteza finală comună a celor trei corpuri .

Avem o *pierdere* de energie *cinetică* la prima ciocnire şi o pierdere de energie cinetică la a doua ciocnire. Căldura cerută este pierderea de energie cinetică în a doua ciocnire plastică care durează atâta timp cât $(m + m_1)$ lunecă pe m_2 :

$$Q = (1/2)(m + m_1)v^2 - (1/2)(m + m_1 + m_2)v'^2 =$$

$$= (1/2)mv_o^2 \cdot mm_2 : [(m + m_1)(m + m_1 + m_2)] = 10{,}0\text{J} . \quad (3)$$

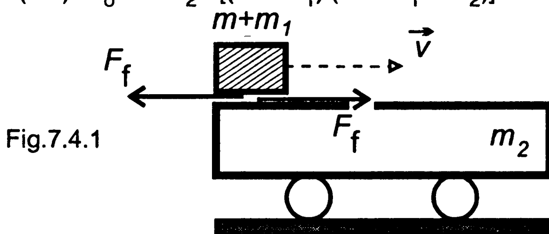


Fig.7.4.1

Se putea folosi direct formula pierderii de energie cinetică în ciocnirea *plastică* a corpului $(m + m_1)$ cu m_2 :

$$Q = (1/2)m_r v_r^2 = (1/2)[(m + m_1)m_2 : (m + m_1 + m_2)] \cdot v^2 . \quad (4)$$

Putem rezolva problema pe o altă cale, folosind ecuaţiile mişcării. Între corpurile $(m + m_1)$ şi m_2 acţionează forţele de frecare la alunecare :

$$F_f = \mu N = \mu(m + m_1)g . \quad (5)$$

Corpul $(m + m_1)$ este frânat de această forţă cu acceleraţia $-\mu g$, iar platforma este accelerată de aceeaşi forţă, dar cu acceleraţia $\mu(m + m_1)g / m_2$. Lunecarea corpului pe platformă încetează, când vitezele corpurilor se egalează :

$$v - \mu g t = v' = \mu(m + m_1)gt / m_2 , \quad (6)$$

$$t_m = m_2 v : [\mu g(m + m_1 + m_2)] . \quad (7)$$

Distanţele parcurse de corpuri până la încetarea lunecării :

$$x_1 = vt_m - (1/2)\mu g t_m^2 , \; x_2 = (1/2)\mu g(m + m_1)t_m^2 / m_2 . \quad (8)$$

Distanţa pe care lunecă corpul pe platformă :

$$s = x_1 - x_2 = m_2 v^2 : [2\mu g(m + m_1 + m_2)] . \quad (9)$$

Teorema variaţiei energiei cinetice pentru corpul $(m + m_1)$ dă :

$$L_1 = -F_f x_1 = \Delta E_{c1} \text{ sau } -\mu(m + m_1)g\,x_1 = (1/2)(m + m_1)(v'^2 - v^2) . (10)$$

Prin intermediul lucrului mecanic L_1 al forţei de frecare, corpul $(m + m_1)$ transmite energie (o parte din energia sa cinetică) platformei m_2 .

Aceeaşi teoremă aplicată platformei m_2 dă :

$L_2 = F_f x_2 = \Delta E_{c2}$ sau $\mu(m + m_1)gx_2 = (1/2)\, m^2 v'^2$. (11)

Prin intermediul lucrului mecanic L_2 al forței de frecare, corpul m_2 capătă energie cinetică. Cele două lucruri mecanice nu sunt egale. Lucrul mecanic total asupra sistemului al forțelor de frecare ***ne-*** *conservative* este egal cu variația energiei *mecanice* :

$$0 > L_1 + L_2 = -\mu(m + m_1)g(x_1 - x_2) = -\mu(m + m_1)gs =$$
$$= -(1/2)\,[(m + m_1)\, m_2 : (m + m_1 + m_2)] \cdot v^2 =$$
$$= \Delta E_c = \Delta E_{c1} + \Delta E_{c2} < 0. \quad (12)$$

Energia mecanică (cinetică) a sistemului scade , $\Delta E_c < 0$, transformându-se parțial în căldură prin intermediul lucrului mecanic al forțelor de frecare *neconservative* .

7.4.2. ***Un remorcher mergând singur cu viteza*** v = 7,2 km/h ***consumă*** M_1^* = 50 kg/h ***cărbune .Trăgând şlepuri cu aceeaşi viteză consumă*** M_2^* = 290 kg/h ***cărbune. Randamentul maşinii cu aburi este*** η = 10 %. ***Ce diametru minim trebuie să aibă cablul de remorcare a şlepurilor, dacă tensiunea la rupere a cablului*** σ_r = 360 N/mm^2 ***?***

Rezolvare. Remorcând şlepurile motorul trebuie să dezvolte o forță de tracțiune suplimentară, egală cu forța de tensiune din cablul de remorcare : $F_2 - F_1 = P_2 / v - P_1 / v$, (1)

dar puterile dezvoltate de motor sunt $P = \eta Q = \eta M^* q$ (2)

(q - puterea calorifică a cărbunelui) şi tensiunea din cablu, la limită,

$$\sigma_r S = \sigma_r \pi d^2 / 4 = (P_2 - P_1) / v = \eta q(M_2^* - M_1^*)\,, \quad (3)$$

$$d = 2\sqrt{\frac{\eta q\left(M_2^* - M_1^*\right)}{\pi \sigma_r v}} = 19 \text{ mm}\,. \quad (4)$$

7.4.3. ***O picătură sferică de apă de rază*** R = 2,0 mm ***cade în aer cu viteză constantă. Ea întâmpină din partea aerului o forță de rezistență*** $F_r = 0{,}24\, \pi R^2 \rho_{aer} v^2$. ***Cu câte grade creşte temperatura picăturii în timpul*** τ = 10 s , ***dacă o fracțiune*** f = 0,60 ***din căldura degajată merge pentru încălzirea picăturii ?***

Rezolvare. Viteza de cădere fiind *constantă* :

$$F_r = 0{,}24\, \pi R^2 \rho_{aer} v^2 = G = mg \quad (1)$$

(am neglijat forța arhimedică). Dar căldura degajată este egală cu minus lucrul mecanic al forței de rezistență (forță *neconservativă*) :

$$mc\Delta t = Q = f \cdot F_r\, s = f F_r\, v\tau = f\, mg\, v\, \tau\,, \quad (2)$$

$$\Delta t = \frac{fg\,\tau}{c}\sqrt{\frac{mg}{0{,}24\pi R^2 \rho_{aer}}} = \frac{fg\,\tau}{0{,}30 \cdot c}\sqrt{\frac{\rho_{apa} R g}{2\rho_{aer}}} = 0{,}13 \text{ grd}\,. \quad (3)$$

7.4.4. ***Un glonț, având o viteză orizontală*** v_o = 500 m/s, ***străpunge o scândură fixă la înălțimea*** h = 2,0 m ***de la sol și se încălzește în acest timp cu*** Δt = 200 K (c = 130 J/(kg · K)). ***Considerând că o fracțiune*** f = 0,50 ***din căldura degajată o preia glonțul, aflați distanța orizontală la care cade glonțul .***

Rezolvare. Căldura degajată este dată de *pierderea* de energie *cinetică* $Q = (1/2)\, m(v_o^2 - v^2)$ din care o fracțiune *f* o preia glonțul :

$$mc\Delta t = f\,Q = f \cdot (1/2)\, m(v_o^2 - v^2)\,. \quad (1)$$

Pe de altă parte bătaia orizontală este :

$$b = vt_c = v\sqrt{2h/g} = \sqrt{2h/g} \cdot \sqrt{v_0^2 - 2c\Delta t\,/\,f} = 242 \text{ m}\,. \quad (2)$$

7.4.5. ***Două corpuri identice, de masă*** m = 1,00 kg ***fiecare, aflate la aceeași înălțime*** h = 5,00 m ***și la distanța*** d = 8,00 m ***unul de altul, sunt lansate simultan unul spre celălalt cu viteze orizontale egale*** v_o = 10,0 m/s . ***Aflați :*** **a)** ***După cât timp și la ce înălțime se întâlnesc corpurile .*** **b)** ***Viteza corpului format prin ciocnirea plastică.*** **c)** ***Variația temperaturii corpurilor în urma ciocnirii plastice. Căldura specifică*** c = 1,00 kJ/(kg · K) .

Rezolvare. a) Condiția de întâlnire :

$$d/2 = v_o t_c\,, \quad t_c = d/(2v_o) = 0{,}40 \text{ s}\,, \quad (1)$$

$$h' = h - (1/2)\, g t_c^2 = 4{,}2 \text{ m}\,. \quad (2)$$

b) Prin ciocnirea *plastică* a celor două corpuri identice și aruncate simetric componentele *orizontale* ale impulsurilor se distrug reciproc, astfel încât rămân componentele verticale :

$$v' = g t_c = 4{,}0 \text{ m/s}\,. \quad (3)$$

c) **Căldura** degajată într-o ciocnire *plastică* :

$$Q = -\Delta E_c = (1/2)\, m_r v_r^2 = (1/2)\,(m/2)(2v_o)^2 = m v_o^2\,, \quad (4)$$

unde m_r este *masa redusă*, în cazul nostru $m/2$, și $\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ este *viteza relativă* a unui corp (*1*) față de celălalt (*2*), în cazul nostru $2v_o$. $\quad 2mc\Delta t = Q = mv_o^2\,, \quad \Delta t = v_o^2/(2c) = 0{,}050$ K . (5)

7.4.6. ***Un remorcher trage șlepuri pe o distanță*** d = 100 km. ***Cablul de remorcare este întins cu o forță*** T = 90kN. ***Singur, fără șlepuri remorcherul dezvoltă o viteză de*** n= 4,0 ori ***mai mare, la același consum orar de cărbune. Randamentul mașinii cu***

aburi $\eta = 10\ \%$. ***Forța de rezistență a apei este proporțională cu viteza. Aflați cantitatea de cărbune necesară pentru transportarea șlepurilor.***

Rezolvare. Fie q - puterea calorifică a cărbunelui și M^* - consumul de cărbune în unitatea de timp (consumul orar). Atunci puterea dezvoltată de motorul remorcherului: $\eta M^* q$ și forța de tracțiune $\eta M^* q / v$. Această forță egalează forțele de rezistență, mişcarea fiind uniformă. În prezența șlepurilor : $\eta M^* q / v = T + k\,v$, (1) unde kv este forța de rezistență a apei întâmpinată de remorcher. În absența șlepurilor (considerând aceeaşi constantă k) :

$$\eta M^* q / (nv) = k\,n\,v . \qquad (2)$$

Din ecuațiile (1) și (2) rezultă : $n = (T + k\,v) / (k\,n\,v)$,

$$v = T / [k\,(n^2 - 1)] , \qquad M^* / v = T n^2 / [\eta q\,(n^2 - 1)] . \qquad (3)$$

Cantitatea de cărbune necesară :

$$m = M^* t = M^* d / v = [T d / (\eta q)]\, n^2 / (\,n^2 - 1) = 3{,}2\ \text{t} . \qquad (4)$$

7.4.7. ***Un automobil cu masa*** $m = 1{,}00$ t ***consumă pe un drum orizontal o cantitate de benzină*** $m_b^* = 9{,}8$ kg/(100 km). ***Cu cât la sută va scădea viteza automobilului, considerând aceleaşi forțe de rezistență şi acelaşi consum orar de benzină, pe un drum înclinat cu panta*** $p = 7$ m / (100 m) . ***Randamentul motorului*** $\eta = 28\ \%$.

Rezolvare. Forța activă de tracțiune F dezvoltată de motor pe drumul orizontal echilibrează forța pasivă de rezistență F_r , mişcarea fiind *uniformă* (v = const $\rightarrow$ $a = 0$). Puterea dezvoltată de forța F este egală cu puterea dezvoltată de motor :

$$P = F\,v_o = \eta q\,(m_b^* v_o) \;\rightarrow\; F = \eta q\, m_b^* = F_r , \qquad (1)$$

unde q este puterea calorifică a benzinei și $m_b^* v_o$ - consumul de benzină pe unitatea de timp (consumul orar).

Pe drumul *înclinat*, la forța de rezistență de mai sus se adaugă componenta greutății $mg \sin\alpha \approx mgp$, de aceea :

$$(F_r + mgp)\, v = P = \eta q m_b^* v_o \;\text{ sau }\; (\eta q m_b^* + mgp)\, v = \eta q m_b^* v_o , \qquad (2)$$

de unde $\qquad v / v_o = \eta q m_b^* : (\eta q m_b^* + mgp)$,

$$(v_o - v) / v_o = 1 - v / v_o = mgp \;:\; (\eta q m_b^* + mgp) =$$
$$= 1 : [1 + \eta q m_b^* / (mgp)] = 35\ \% . \qquad (3)$$

7.4.8. ***O locomotivă de masă*** $m = 30$ t, ***consumând orar*** $M^* = 98$ kg/h ***cărbune, cu randamentul motorului*** $\eta = 10\ \%$, ***are pe drum orizontal o viteză*** $v_o = 50$ km/h. ***Ce viteză constantă*** v ***va avea locomotiva dacă intră pe un drum înclinat de pantă***

p = 1 :100 ***? Se vor considera trei cazuri : forța de rezistență totală este proporțională :*** a) ***cu apăsarea normală pe șine, b) cu viteza locomotivei, c) cu pătratul vitezei , în ultimul caz se vor calcula în primă aproximație limitele între care este cuprinsă viteza*** v, ***considerând intersecția a două grafice corespunzătoare (hiperbolă și parabolă) în diagrama*** F - v .

Rezolvare. a) Forța de tracțiune dezvoltată de locomotivă:

$$P / v_0 = \eta M^* q / v_0 = kmg \, , \qquad (1)$$

$$\eta M^* q / v = kmg \cos \alpha + mg \sin \alpha \, . \qquad (2)$$

Prin împărțirea ecuațiilor membru la membru, obținem :

$$v = v_0 : (\cos \alpha + r) \, , \qquad (3)$$

unde $r = (\sin \alpha) / k = (\sin \alpha)\, mgv_0 : (\eta M^* q) \approx$

$$\approx mgpv_0 : (\eta M^* q) = 0{,}50 \, . \qquad (4)$$

$$v \approx v_0 : (1 + r) = 33 \text{ km/h} \, . \qquad (5)$$

b) În acest caz, $\eta M^* q / v_0 = kv_0$, respectiv

$$\eta M^* q / v = kv + mg \sin \alpha \, , \qquad (6)$$

de unde $(v / v_0)^2 + r\,(v / v_0) - 1 = 0$, unde r este (4) , (7)

$$v = v_0 \left(\sqrt{1 + r^2 / 4} - r / 2 \right) = 39 \text{ km/h} \, . \qquad (8)$$

c) $\eta M^* q / v_0 = kv_0^2$, $\eta M^* q / v = kv^2 + mg \sin \alpha$, (9)

$$\eta M^* q / v = mg \sin \alpha + (\eta M^* q / v_0^3)\, v^2$$

sau

$$v_0 / v = r + v^2 / v_0^2 \, . \qquad (10)$$

Este o ecuație de gradul *trei* în v / v_0 pe care o vom rezolva prin ***metoda aproximațiilor succesive*** . Soluția se află la intersecția curbelor : $y_1 = v_0 / v$ (hiperbolă) , $y_2 = r + v^2 / v_0^2$ (parabolă). (11)

Reprezentăm grafic aceste curbe. Pentru $v / v_0 = 1$ ordonatele sunt respectiv, $y_1 = 1$, $y_2 = r + 1$, deci din grafic se vede că soluția $v_r < v_0$, ceea ce era de așteptat. Vom merge conform săgeților din figură. Pentru marginea inferioară v_1 avem condiția

$$y_2 = 1 = r + v_1^2 / v_0^2 \rightarrow v_1 = v_0 \sqrt{1 - r} = 35{,}4 \text{ km/h} \, . \qquad (2)$$

O margine superioară v_2 mai bună, în aproximația întâia, va fi dată de condiția

$$y_1(v_1) = y_2(v_2) \, , \quad \text{adică } v_0 / v_1 = r + v_2^2 / v_0^2 \, ,$$

$$v_2 = v_0 \sqrt{1/\sqrt{1 - r} - r} = 47{,}7 \text{ km / h} \, . \qquad (13)$$

Viteza căutată v_r este cuprinsă între v_1 şi v_2. Putem continua mai departe pentru a obţine marginile lui v_r în aproximaţia a doua.

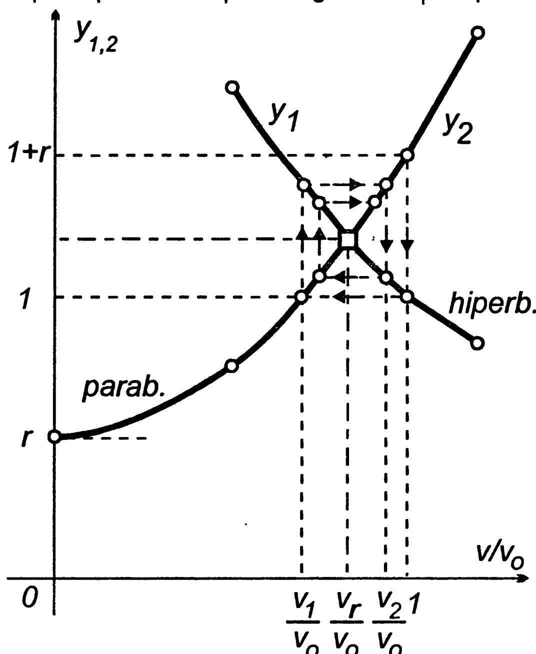


Fig.7.4.8

Cine cunoaşte *formulele lui **Cardano*** poate rezolva ecuaţia (10) astfel: $x^3 + rx - 1 = 0$, $x = v / v_0$. (14)

Discriminantul $D = (r/3)^3 + (1/2)^2 = 0{,}25463 > 0$, (15)

deci avem o singură soluţie reală. Calculăm mărimile ajutătoare:

$$a = \sqrt[3]{1/2 + \sqrt{D}} = 1{,}001534 \ ; \ b = \sqrt[3]{1/2 - \sqrt{D}} = -0{,}166411 \ ; \quad (16)$$

$$v_r = v_0(a + b) = 41{,}7 \text{ km/h} . \quad (17)$$

7.4.9. ***Un corp de dimensiuni relativ mici, care se mişcă într-un fluid cu viteze relativ mici, când regimul de curgere este* laminar *(în straturi paralele, fără formarea de vârtejuri), întâmpină din partea fluidului o forţă de* frecare *proporţională cu viteza (legea lui* Stockes*). În cazul unor corpuri* sferice *această forţă de frecare este dată de* formula lui *Stockes :***

$$F = 6\pi\eta R v , \quad (1)$$

unde** η **este vâscozitatea fluidului; pentru aer

$$\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)} . \quad (2)$$

Într-o zi s-a constatat că ceața cade* uniform *cu viteza v = = 0,98 cm/s. ***Calculați : a) Raza picăturilor care compun ceața . b) Înălțimea de la care trebuie să cadă ceața pentru ca fiecare picătură să se încălzească cu*** Δt = 0,10 grd, ***considerând că o fracțiune*** f = 0,85 ***din căldura dezvoltată o preiau picăturile .***

Rezolvare. a) Căderea *uniformă*, cu viteza limită de cădere liberă, se obține când forța de frecare (1) echilibrează greutatea aparentă a picăturii :

$$F = 6\pi\eta R v_0 = mg(1 - \rho_{aer}/\rho_{ap\bullet}) = (4\pi/3)R^3 g(\rho_{ap\bullet} - \rho_{aer}) , \quad (3)$$

$$R = 3\sqrt{\frac{\eta v_0}{2g\left(\rho_{apa} - \rho_{aer}\right)}} = 9{,}0\ \mu m . \quad (\rho_{aer} = 1{,}29\ kg/m^3). \quad (4)$$

b) Lucrul mecanic al forței de frecare (*ne*conservative) duce la variația energiei mecanice (cinetice şi potențiale) :

$$- F \cdot h = \Delta E = - mgh < 0 . \quad (5)$$

Energia mecanică (în cazul nostru cea potențială) scade transformându-se prin intermediul lucrului mecanic al forței de frecare în căldură :

$$Q = mgh , \quad f Q = f mgh = mc\Delta t ,$$

$$h = c\Delta t / (f g) = 50\ m . \quad (6)$$

7.4.10. ***Pericolul unui război nuclear constă şi în aşa numita "iarnă nucleară". Dacă în urma incendiilor se formează în straturile superioare ale atmosferei un strat subțire de funingine, care absoarbe şi reemite practic toată radiația solară, afară de cea infraroşie (la temperatura obişnuită), atunci ce temperatură medie de echilibru a Pământului se va stabili, ştiind că radiația emisă de un corp la echilibru termic este proporțională cu*** T^4 ***(legea* Stephan - Boltzmann*) ?***

Rezolvare. Fie q_0 fluxul de energie radiantă incident pe Pământ de la Soare. La echilibru Pământul absoarbe şi reemite acest flux proporțional cu T^4 ($T \sim 290$ K). Dacă se formează stratul de funingine, acesta având *două* suprafețe care îl delimitează, absoarbe fluxul q_0 şi emite $q_0/2$ înapoi în cosmos şi $q_0/2$ spre Pământ, care primeşte astfel un flux $q_0/2 \sim T'^4$. Rezultă atunci

$$T'^4 / T^4 = (q_0/2) : q_0 , \quad T' = T/\sqrt[4]{2} = 244\ K = - 29^oC .$$

(*) **7.4.11.** ***Într-un cilindru sub un piston de masă*** M = 10 kg ***este vaporizat un lichid. La puterea încălzitorului*** P_1= 100 W , ***pistonul urcă cu viteza*** v_1 = 5,0 cm/s, ***iar la puterea*** $P_2 = 2P_1$,

urcă cu viteza $v_2 = 2{,}5\ v_1$. ***Aflați căldura latentă de vaporizare*** λ, ***cunoscând temperatura de vaporizare*** $T = 370$ K ***şi masa molară a lichidului*** $\mu = 18$ g/mol. ***Presiunea deasupra pistonului este neglijabilă.***

Rezolvare. *Bilanțul* energiilor pentru vaporizarea unei cantități *infinitezimale* d*m* de lichid în timpul infinit *mic* d*t* este :

$$P\,dt = dm\,\lambda + q^*\,dt\,, \qquad (1)$$

unde q^* sunt pierderile de căldură pe unitatea de timp. Vaporizarea se face sub presiunea constantă $p = Mg / S$, deci şi $T =$ const (v. izotermele lui ***Andrews***). *Ecuația de stare* dă prin diferențiere :

$$m = \mu pV / (RT)\,, \quad dm = [\,\mu p / (RT)]\,dV = [\,\mu p / (RT)]\,S dx =$$
$$= [\,\mu p / (RT)]\,Sv dt = [\,\mu Mg / (RT)]\,v dt \qquad (2)$$

care introdus în ecuația bilanțului energiilor (1) dă:

$$P = \lambda\,[\,\mu Mg / (RT)]\,v + q^*\,. \qquad (3)$$

Scriind această ecuație în cele două cazuri :

$$P_{1,2} = \lambda\,[\,\mu Mg / (RT)]\,v_{1,2} + q^*\,, \qquad (4)$$

obținem , făcând diferența ecuațiilor:

$$\lambda = RT(P_2 - P_1) : [\,\mu Mg(v_2 - v_1)] = 2{,}3 \text{ MJ/kg}\,. \qquad (5)$$

Problema se poate rezolva, judecând elementar, fără diferențiale, ci cu variații foarte *mici*, care descresc către zero, Δt , Δm , ΔV ,etc.

* * *

8. PROBLEME RECAPITULATIVE

8.1. ***O sferă de cupru cu raza R = 10 cm este o dată așezată pe un plan orizontal și apoi suspendată de un fir scurt. Neglijând pierderile de căldură spre exterior, aflați căldura specifică în procesul de încălzire a sferei în cele două cazuri.***

Rezolvare. *Căldura specifică a unei substanțe este căldura necesară unității de masă de a-și mări temperatura cu o unitate* (1 grd) *în* **anumite condiții specificate :**

$$\bar{c} = \frac{1}{m}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{\text{cond}} \quad \text{sau} \quad c = \frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{\text{cond}} . \qquad (1)$$

De exemplu, căldura specifică la *presiune* ***constantă*** (sau volum constant) este căldura necesară unității de masă pentru a-și mări temperatura cu 1 grd, păstrând în procesul de încălzire *presiunea* **constantă** (sau volumul **constant**) :

$$c_p = \frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dt}\right)_p \quad \text{sau} \quad c_V = \frac{1}{m}\left(\frac{dQ}{dt}\right)_V . \qquad (2)$$

Prin urmare, în principiu, există o *infinitate* de călduri specifice în funcție de *condițiile* în care se desfășoară procesul de încălzire. De exemplu, la gazele *ideale*, în procesele **politropice**, căldura molară este

$$C_k = C_V + R/(1 - k) = \text{const} \qquad (3)$$

(k - exponent politropic). Căldura specifică poate să *nu* fie constantă de-a lungul unui proces de încălzire. Mai importante sunt căldurile specifice c_p și c_V care la solide sunt apropiate între ele, iar la gazele ideale

$$C_p - C_V = R \quad (\textit{J. R. Mayer}) . \qquad (4)$$

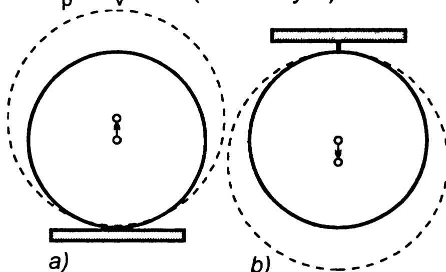


Fig.8.1

În cazul problemei :

$$c=\frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}=\frac{1}{m}\frac{dU+dL}{dT}=\frac{1}{m}\frac{mc_V dT+dL}{dT}=c_V+\frac{1}{m}\frac{dL}{dT}. \qquad (5)$$

Observăm că prin încălzire şi dilatare, centrul de greutate urcă, respectiv coboară cu $R_o \alpha dT$, deci se efectuează lucrul mecanic $\mp mg R_o \alpha dT$ (egal cu minus variația energiei potențiale gravitaționale a sferei), $c = c_V \mp gR_o\alpha = 395 \mp 16\cdot 10^{-6}$ J/(kg·K). (6)
Efectul este extrem de *mic*.

8.2. ***Demonstrați că prin amestecarea a două volume diferite*** $V_{1,2}$ ***din acelaşi lichid, aflate la temperaturi inițiale diferite*** $t_{1,2}$***, volumul total (global) nu se schimbă după atingerea echilibrului termic :*** $V_{1f} + V_{2f} = V_1 + V_2 =$ invar .

Rezolvare. $V_1 = V_{o1}(1 + \beta t_1)$, $V_2 = V_{o2}(1 + \beta t_2)$ (1)
Ecuația schimbului de căldură : $Q_{ced} = Q_{prim}$,

$$m_2 c(t_2 - \theta) = m_1 c(\theta - t_1), \quad m_1 = \rho_o V_{o1}, \ m_2 = \rho_o V_{o2} \rightarrow$$

$$V_{o2}(t_2 - \theta) = V_{o1}(\theta - t_1). \qquad (2)$$

Volumele finale : $V_{1f} = V_{o1}(1 + \beta\theta) = V_{o1}[1 + \beta t_1 + \beta(\theta - t_1)] =$

$$= V_1 + V_{o1}\beta(\theta - t_1), V_{2f} = V_2 + V_{o2}\beta(\theta - t_2). \qquad (3)$$

Volumul total : $V_{1f} + V_{2f} = V_1 + V_2 + \beta\,[V_{o1}(\theta - t_1) + V_{o2}(\theta - t_2)] =$

$$= V_1 + V_2, \qquad (4)$$

unde am ținut seama de (2) .

8.3. ***Un cilindru cu aria bazei*** $S = 1{,}00$ dm^2 ***are un perete interior despărțitor, termoizolant, prevăzut cu o supapă ce se deschide numai dacă*** $p_2 > p_1$ ***. Inițial în jumătatea stângă avem*** $m_1 = 12{,}0$ g He***, iar în dreapta*** $m_2 = 2{,}00$ g He***, temperatura fiind peste tot*** 0°C, $\ell = 1{,}12$ m ***şi sistemul este izolat adiabatic de exterior . Presiunea atmosferică*** H = 100 kPa***. Împingem încet pistonul şi când supapa se deschide, oprim puțin pistonul şi apoi îl mişcăm încet până la peretele despărțitor. Ce lucru mecanic efectuăm noi ? Se dă*** R = 8,3 J/(mol·K) **.**

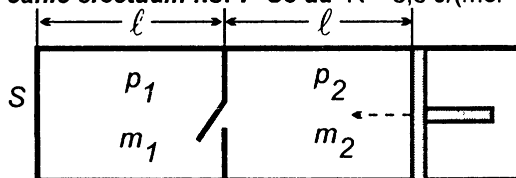


Fig.8.3

Rezolvare. Inițial presiunea din partea stângă este ($V = S \cdot \ell$) :

$$p_1 = (m_1 / \mu)\, RT / V = 600 \text{ kPa}, \qquad (1)$$

iar în partea dreaptă : $p_2 = p_1 \cdot m_2 / m_1 = 100$ kPa . (2)

Împingând pistonul spre stânga, gazul din compartimentul drept se comprimă *adiabatic*. Supapa se va deschide numai atunci când presiunea atinge valoarea p_1 (1) . Aplicăm *legea lui* ***Poisson***

pentru transformarea **adiabatică** : $pV^{\gamma} = \text{const}$,

$\gamma = C_p / C_v = c_p / c_v = (i + 2) / i = 5/3$, deci $p_2 V^{5/3} = p_1 V'^{\,5/3}$, (3)

de unde rezultă : $V' = V (p_2 / p_1)^{3/5} = 3{,}8 \text{ dm}^3$ (4)

= volumul compartimentului drept în momentul deschiderii supapei. În acest moment temperatura în dreapta a devenit T', şi anume din

$$T V^{\gamma - 1} = \text{const} \rightarrow T' = T(V / V')^{\gamma - 1} = 560 \text{ K}. \qquad (5)$$

Lucrul mecanic efectuat de **noi** W în acest proces duce la creşterea *energiei interne* . În adevăr, din principiul I al termodinamicii $Q = \Delta U + L$, dar pentru un proces **adiabatic** $Q = 0$ şi rezultă $\Delta U = - L = + W$, unde $L = - W$ este lucrul mecanic efectuat de gaz. Prin urmare, lucrul mecanic efectuat de **noi** W' este

$$W' = - L = \Delta U = m_2 c_v \Delta T =$$

$$= (m_2 / \mu) C_v \Delta T = (m_2 / \mu)(3R / 2)\Delta T = 1{,}80 \text{ kJ}. \qquad (6)$$

Am folosit formula variației *energiei interne* a unui gaz ideal în orice transformare : $\Delta U = m c_v \Delta T = \nu C_v \Delta T$. *Energia internă a unui gaz ideal este funcție numai de temperatură (legea lui **Joule**)* .

De asemenea, la gazele ideale *monoatomice* ($i = 2$):

$$C_v = 3R / 2 = 12{,}5 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)},\ c_v = C_v / \mu,\ \mu_{He} = 4 \text{ g/mol}. \qquad (7)$$

Odată supapa deschisă şi pistonul menținut pe loc, se face un schimb de căldură între gazele din compartimente şi la echilibru termodinamic temperatura va fi dată de ecuația :

$$m_2 c_v (T' - \Theta) = m_1 c_v (\Theta - T),$$

$$\Theta = (m_1 T + m_2 T') : (m_1 + m_2) = 314 \text{ K}. \qquad (8)$$

Acum urmează a doua comprimare *adiabatică* a întregului gaz (supapa, odată deschisă, rămâne acum deschisă tot timpul) de la volumul $V + V' = 11{,}2 + 3{,}8 = 15{,}0 \text{ dm}^3$ (9)

la temperatura $\Theta = 314$ K, până la volumul final $V = 11{,}2 \text{ dm}^3$ şi

temperatura finală T'' : $T'' = \Theta [(V + V') / V]^{\gamma - 1} = 382 \text{ K}$. (10)

Lucrul mecanic efectuat măreşte energia internă a gazului astfel :

$$W'' = m c_v (T'' - \Theta) = 3{,}00 \text{ kJ}. \qquad (11)$$

Lucrul mecanic total: $W = W' + W'' = 1{,}80 + 3{,}00 = 4{,}80$ kJ .(12)

Trebuie scăzut însă de aici lucrul mecanic efectuat de presiunea exterioară atmosferică : $W_o = H\,S \cdot \ell = 1{,}12$ kJ . (13)

Prin urmare, rezultatul final este următorul :

$$W_{ef} = 4{,}80 - 1{,}12 = 3{,}68 \text{ kJ} . \quad (14)$$

8.4. ***Raportul de compresie al unui motor cu explozie în 4 timpi este*** $\varepsilon = 9{,}5$ $(= V_1 / V_2)$ ***. În motor este aspirat aerul din mediul înconjurător la temperatura*** $t_1 = 27°C$ ***şi presiunea*** $p_1 = 100$ kPa***. În timpul aprinderii prin scânteie a combustibilului (a amestecului gazos) presiunea din cilindru se dublează. Presupunem că procesele din cilindru şi funcţionarea motorului sunt ideale, conform diagramei din figură. Procesele 1-2 şi 3-4 sunt adiabatice*** $(\gamma = 1{,}40)$***. a) Ce fel de procese au loc între punctele 0-1, 2-3, 4-1 şi 1-0 ? b)Determinaţi parametrii de stare p, T pentru toate stările care corespund punctelor diagramei. c) Determinaţi randamentul termic al motorului.***

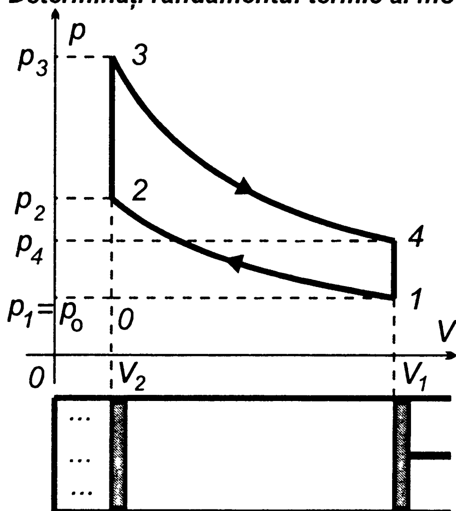


Fig.8.4

Rezolvare. a) 0-1 admisia - proces izobar; 2-3 aprinderea şi arderea combustibilului - proces izocor; 4-1 deschiderea supapei de evacuare - proces izocor; 1-0 evacuarea - proces izobar .

b) $p_o = p_1 = 100$ kPa, $T_1 = 300$ K, $p_3 = 2p_2$ şi $\varepsilon = V_1 / V_2 = 9{,}5$.

1-2 comprimare *adiabatică*: $p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}$, de unde

$$p_2 = p_1(V_1 / V_2)^{\gamma} = p_1\varepsilon^{\gamma} = 2{,}34 \text{ MPa}. \quad (1)$$

$$T_2V_2^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1}, \text{ de unde } T_2 = T_1\,\varepsilon^{\gamma-1} = 740 \text{ K}. \quad (2)$$

2-3 transformarea *izocoră* : $p_3 = 2p_2 = 4{,}68$ MPa , (3)

$$T_3 = T_2 \cdot p_3 / p_2 = T_2 \cdot 2 = 1480 \text{ K}. \quad (4)$$

3-4 transformarea *adiabatică* : $p_3V_2^{\gamma} = p_4V_1^{\gamma}$,

$$p_4 = p_3\,(V_2 / V_1)^{\gamma} = p_3\,\varepsilon^{-\gamma} = 2p_2\varepsilon^{-\gamma} = 2p_1 = 2{,}1 \text{ MPa}, \quad (5)$$

$$T_4V_1^{\gamma-1} = T_3V_2^{\gamma-1}, \quad T_4 = T_3\,\varepsilon^{1-\gamma} = 600 \text{ K}. \quad (6)$$

4-1 transformarea *izocoră* :

$$T_1' = T_4 \cdot p_1 / p_4 = T_4 / 2 = T_1 = 300 \text{ K}. \quad (7)$$

c) $\eta = 1 - Q_{ced} / Q_{abs} = 1 - \nu C_v(T_4 - T_1) : [\nu C_v(T_3 - T_2)] =$

$$= 1 - (T_4 - T_1) : (T_3 - T_2) = 59{,}5\ \%. \quad (8)$$

8.5. ***Un balon cu aer cald are volumul constant*** V =1,10 m^3 ***şi un orificiu inferior de comunicare cu atmosfera. Învelişul (anvelopa) are masa*** m = 0,187 kg ***şi volumul neglijabil în raport cu*** V. ***Balonul trebuie lansat la o temperatură a aerului exterior*** t_1 = 20,0°C ***şi la o presiune normală a aerului exterior*** p_o= = 101,3 kPa. ***În aceste condiţii densitatea aerului este*** ρ_1 = 1,20 kg/m^3 . ***a) Ce temperatură*** t_2 ***trebuie să aibă aerul cald din interiorul balonului pentru ca el să rămână în suspensie ? b) Aerul din interiorul balonului, balon fixat acum printr-un fir de Pământ, este adus la temperatura constantă*** t_3 = 110°C. ***Determinaţi forţa care acţionează asupra firului. c) Se închide orificiul balonului (densitatea aerului din interior rămâne constantă). Cu temperatura constantă a aerului interior*** t_3 = 110°C, ***balonul urcă într-o atmosferă izotermă cu*** t_1 = 20°C ***şi cu presiunea la sol*** p_o = 101,3 kPa. ***Ce înălţime*** h ***atinge balonul în aceste condiţii ? d) La înălţimea*** h ***(determinată la punctul c) balonul este deplasat cu*** Δh = 10 m ***din poziţia sa de echilibru şi apoi lăsat liber. Ce fel de mişcare va efectua balonul ?***

Rezolvare. a) Condiţia de plutire a balonului :

$$\rho_2V + m = \rho_1V, \quad \rho_2 = \rho_1 - m / V = 1{,}03 \text{ kg/m}^3. \quad (1)$$

Pe de altă parte, $\rho_2 / \rho_1 = (p_2 / p_1)\,(T_1 / T_2) = T_1 / T_2$, de unde

$$T_2 = T_1\,(\rho_1 / \rho_2) = 341{,}5 \text{ K}, \quad t_2 = 68{,}4^{\circ}\text{C}. \quad (2)$$

b) Tensiunea din fir este egală cu diferența dintre forța arhimedică şi greutatea balonului cu conținutul său :

$F = \rho_1 Vg - (\rho_3 V + m)g$, unde $\rho_3 = \rho_1 \, T_1 / T_3 = 0{,}913$ kg/m^3.(3)

Cu aceste date obținem tensiunea din fir :

$$F = [(\rho_1 - \rho_3)V - m]\, g = 1{,}2 \text{ N} . \qquad (4)$$

c) Noua condiție de plutire la înălțimea h :

$$\rho_3 V + m = \rho_h V , \; \rho_h = \rho_3 + m / V = 1{,}088 \text{ kg/m}^3. \qquad (5)$$

Dar formula *barometrică* ne dă: $\rho_h = \rho_1 e^{-\mu g h / (RT)} = \rho_1 e^{-\rho_1 g h / p_0}$,

de unde $h = [p_0 / (\rho_1 g)] \ln(\rho_1 / \rho_h) = 843$ m . (6)

d) Diferența $\Delta h = 10$ m « $h = 843$ m, de aceea variația exponențială a densității cu altitudinea se poate aproxima cu o funcție *liniară* : $\Delta\rho_h = \rho_h(- \rho_1 g / p) \cdot \Delta h \approx - k \cdot \Delta h$. (7)

Apare deci o forță de *revenire* proporțională cu depărtarea (elongația) de la poziția de echilibru, datorită variației forței arhimedice :

$$\Delta\rho_h Vg = - \rho_h Vg \, (\rho_1 g / p) \cdot \Delta h . \qquad (8)$$

O astfel de forță de tip **elastic** generează oscilații **sinusoidale armonice**, dar datorită forței de *rezistență* (frecare) a aerului, aceste oscilații vor fi ***amortizate.***

* * *

SISTEMUL INTERNAŢIONAL DE UNITĂŢI

***Scopul** fizicii* este descrierea , explicarea şi prevederea fenomenelor naturii, pentru a le putea stăpâni şi folosi.

Fizica stabileşte ***legi*** pe baza *observaţiilor* şi a *experimentului* ştiinţific.

Legea exprimă legătura *necesară* şi *esenţială* între fenomene, legătura dintre *cauză* şi *efect*, care condiţionează o dezvoltare determinată a fenomenelor.

1. Sistem coerent de unităţi. Descrierea şi explicarea fenomenelor, deci formularea ***legilor***, trebuie să fie ***cantitativă*** - condiţie fundamentală a ştiinţelor *exacte* - de aceea ***matematica*** este un instrument indispensabil fizicii. Dar cantitatea se determină numai prin *măsurări*, de aceea ***măsurarea*** este un proces fundamental în fizică.

***A măsura** o mărime înseamnă a stabili de câte ori se cuprinde în ea o altă mărime de aceeaşi natură, bine definită şi aleasă prin convenţie drept **unitate de măsură**.*

Notăm cu [A] ***unitatea*** de măsură pentru mărimea fizică A şi cu a valoarea sa *numerică*-măsurată, atunci prin convenţie:

$$a = A : [A], \quad A = a \cdot [A]. \tag{1}$$

Dacă *unitatea* de măsură [A] se *măreşte* de n ori, valoarea numerică-măsurată a se *micşorează* de n ori.

Orice măsurare fizică este întotdeauna un *proces de interacţiune* între obiectul măsurat şi dispozitivul de măsură, proces care *modifică şi starea obiectului măsurat* (pentru microparticule această perturbare este *principial* inevitabilă).

Nici o măsurare fizică nu este perfectă, orice măsurare fizică implică totdeauna ***erori de măsurare*** mai mari sau mai mici. Odată cu dezvoltarea ştiinţei şi tehnicii se perfecţionează şi tehnica măsurărilor. Astăzi în multe domenii (de exemplu, în optică şi în astronomie) s-a atins o precizie de măsurare extrem de înaltă.

În principiu, pentru fiecare mărime fizică se poate alege o unitate proprie arbitrară, dar atunci legile fizicii s-ar exprima prin formule care ar conţine *coeficienţi numerici paraziţi*, dependenţi de unităţile folosite. De aceea, ţinând seama de relaţiile care există

între diferite mărimi fizice, se alege totdeauna un număr ***mic*** de mărimi, numite ***fundamentale***, şi pe baza acestora se construieşte un ***sistem coerent de unităţi***, astfel încât în *cele mai frecvente şi mai importante* formule fizice să dispară coeficienţii paraziţi. Celelalte mărimi şi unităţi, legate de cele fundamentale prin legi ale fizicii, se numesc *mărimi şi unităţi* ***derivate***.

Nu există vreo lege a naturii care să ne impună alegerea *anumitor* mărimi drept mărimi *fundamentale* sau să ne indice *numărul* acestora. De aceea , în principiu, s-ar putea alege o *singură* unitate arbitrară pentru o *singură* mărime considerată fundamentală (de exemplu, lungimea sau durata), toate celelalte fiind astfel derivate.

În practică se aleg totdeauna cel puţin ***trei*** unităţi fundamentale. Întrucât materia există şi se mişcă în *spaţiu şi timp*, care sunt formele sale de existenţă, se aleg în primul rând ***lungimea şi durata*** ca mărimi fundamentale. La aceste caracteristici *externe* ale materiei se adaugă cel puţin o mărime caracteristică *internă* a materiei, cum este ***masa*** sau *sarcina electrică* (curentul electric).

De exemplu, în sistemul CGS (Gauss) se aleg trei unităţi fundamentale : centimetrul (C), gramul (G) şi secunda (S).

2. Unităţi SI fundamentale. În sistemul Internaţional SI (adoptat de Conferinţa Generală de Măsuri şi Greutăţi, Paris, oct. 1960) se aleg ***şapte*** unităţi fundamentale, dintre care primele *trei* intervin în mecanică şi în toată fizica, celelalte unităţi fiind alese pentru fiecare domeniu fundamental al fizicii (electricitate, termodinamică, optică).

1. *Unitatea de lungime* ***metrul*** :

Metrul este lungimea drumului parcurs de lumină în vid în timp de 1 / 299 792 458 dintr-o secundă (1983).

Observaţie. În SI viteza luminii în vid este considerată ***fixă şi exactă*** prin *convenţie* :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} . \qquad (2)$$

2. *Unitatea de masă* ***kilogramul*** :

Kilogramul este egal cu masa prototipului internaţional al kilogramului (din platină iridiată, păstrat la Biroul Internaţional)(1901).

3. *Unitatea de timp* ***secunda*** :

Secunda este durata a 9 192 631 770 perioade ale radiaţiei care corespunde tranziţiei între cele două nivele de energie hiperfine ale stării fundamentale a atomului de cesiu 133 (1967).

4. *Unitatea de curent electric* ***amperul*** :

Amperul este intensitatea unui curent *constant* care, menținut în doi conductori paraleli, rectilinii, cu lungimea infinită şi cu secțiunea circulară neglijabilă, aşezați în vid, la o distanță de 1 metru unul de altul, ar produce între aceşti conductori o forță de $2 \cdot 10^{-7}$ newtoni pe o lungime de 1 metru (1948).

Observație. În locul denumirii "intensitatea curentului electric" se foloseşte acum denumirea "curentul electric" .

5. *Unitatea de temperatură termodinamică **kelvinul*** :

Kelvinul este fracțiunea 1/273,16 din temperatura *termodinamică* a *punctului **triplu** al apei* (1967).

Observație. Unitatea kelvin şi simbolul său K se folosesc şi pentru a exprima un *interval* sau o *diferență de temperatură.*

Temperatura Celsius termodinamică este definită prin relația:

$$t = T - T_0 = T - 273,15 \,. \qquad (3)$$

Observație. Nu confundați 273,16 K - temperatura punctului ***triplu*** al apei, cu 273,15 K - temperatura de *topire* a gheții.

6. *Unitatea de cantitate de substanță **molul*** :

Molul este *cantitatea de substanță* a unui sistem care conține tot atâtea entități elementare câți *atomi* există în 12 grame de carbon 12 (1971).

De câte ori se întrebuințează molul, entitățile elementare trebuie specificate, ele putând fi atomi, molecule, ioni, electroni, alte particule sau grupuri specificate de asemenea particule.

Observație. Nu confundați mărimea ***masă*** care se măsoară cu *kilogramul*, cu mărimea ***cantitate de substanță*** care se măsoară cu *molul.*

7. *Unitatea de intensitate luminoasă **candela*** :

Candela este intensitatea luminoasă, într-o direcție dată, a unei surse care emite o radiație monocromatică cu frecvența de $540 \cdot 10^{12}$ Hz şi a cărei intensitate energetică, în această direcție, este 1 / 683 W/sr (1979) .

Unități SI fundamentale

Mărimea	*Denumirea*	*Simbolul*
Lungime	Metru	m
Masă	Kilogram	kg
Timp	Secundă	s
Curent electric	Amper	A
Temperatură termodinamică	Kelvin	K
Cantitate de substanță	Mol	mol
Intensitate luminoasă	Candelă	cd

3. Formule dimensionale. Să notăm unitățile mărimilor fundamentale cu litere majuscule fără paranteze : L, M, T, I, Θ, N, J . Atunci pentru orice unitate derivată avem ecuația :

$$[A] = L^a\, M^b\, T^c\, I^d\, Q^e\, N^f\, J^g\,, \qquad (4)$$

numită *ecuația de dimensiuni* sau *formula dimensională* a mărimii *A* față de mărimile fundamentale alese. Exponenții *a*, *b*, *c*, ... sunt ***numere întregi***. Se spune că mărimea *A* are dimensiunea *a* față de lungime, dimensiunea *b* față de masă, etc.

Constantele care intervin în legile fizicii pot fi atât *dimensionale* (de exemplu, constanta atracției gravitaționale, constanta lui Planck, etc), cât şi *adimensionale* (în ultimul caz nu intervin în formula dimensională).

Principiul omogenității dimensionale a formulelor fizicii : Deoarece nu se pot aduna sau egala decât mărimi fizice de *aceeaşi natură* , oricare formulă fizică trebuie să fie ***omogenă*** din punct de vedere ***dimensional***, adică ambii membri ai unei egalități, cât şi fiecare termen al unei sume trebuie să aibă ***aceleaşi dimensiuni fizice*** sau ***aceleaşi unități de măsură***, altfel formula nu are sens.

Observăm că există cazuri când două mărimi de natură diferită pot avea totuşi aceeaşi dimensiune (de exemplu, lucrul mecanic şi momentul forței : L^2MT^{-2} , entropia şi capacitatea calorică : $L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$, etc.)

4. Unități derivate. Pentru a stabili unitatea de măsură pentru o mărime *derivată* (deci alta decât cele 7 fundamentale), într-un sistem *coerent* de unități, plecăm de la cea mai importantă şi mai uzuală formulă care conține mărimea considerată şi punem condiția ca coeficientul numeric parazit să fie egal cu 1. Prin aceasta se fixează unitatea de măsură.

Exemple. a) Pentru definirea unității de *viteză* folosim legea mişcării *rectilinii uniforme* $\Delta x / \Delta t$ = const. Cu o unitate arbitrară pentru viteză, ecuația mişcării se scrie $x = k \cdot vt$, unde *k* este un coeficient numeric parazit. De exemplu, dacă [v] = viteza sunetului în aer la 0°C şi L = 1 m, T = 1 s , atunci $k = 331$; $x = 331 \cdot vt$.

Într-un sistem *coerent* de unități punem $k = 1$, atunci

$$v = x / t\,,\quad [v] = [x] / [t] = L / T = L \cdot T^{-1} = 1 \text{ m/s}\,. \qquad (5)$$

Unitatea de viteză este egală cu viteza unui mobil care se deplasează rectiliniu uniform, parcurgând unitatea de lungime 1 m în unitatea de timp 1 s.

Unităţi derivate exprimate prin cele fundamentale

Mărimea	*Denumirea unităţii*	*Simbolul*
arie	metru pătrat	m^2
volum	metru cub	m^3
viteză	metru pe secundă	m/s
acceleraţie	metru pe secundă la pătrat	m/s^2
număr de undă	metru la puterea minus unu	m^{-1}
densitate	kilogram pe metru cub	kg/m^3
volum specific (masic)	metru cub pe kilogram	m^3/kg
densitatea curentului electric	amper pe metru pătrat	A/m^2
câmp magnetic	amper pe metru	A/m
concentraţia cantităţii de substanţă	mol pe metru cub	mol/m^3
luminanţă	candelă pe metru pătrat	cd/m^2

b) Pentru definirea unităţii de *acceleraţie* folosim legea vitezei în mişcarea *rectilinie uniform accelerată*, scrisă fără coeficient numeric parazit :

$$a = (v - v_0) / t , \quad [a] = [v] / [t] = LT^{-1} / T = LT^{-2} = 1\ m/s^2 . \qquad (6)$$

Unitatea de acceleraţie este egală cu acceleraţia unui mobil care se deplasează rectiliniu uniform accelerat şi a cărui viteză creşte cu o unitate 1 m/s într-un timp egal cu unitatea 1 s.

c) Pentru definirea unităţii de *forţă* folosim principiul *fundamental* al mecanicii (*lex secunda*) : $F = k \cdot ma$ şi punem condiţia $k = 1$:

$$F = ma , \quad [F] = [m]\,[a] = MLT^{-2} = 1\ kg \cdot m/s^2 = 1\ N . \qquad (7)$$

Unitatea de forţă newton (N) este egală cu forţa care aplicată unei mase unitate 1 kg îi imprimă o acceleraţie unitate 1 m/s^2 .

Observăm că unele unităţi derivate pot fi exprimate în mai multe moduri, de exemplu, $1\ J = 1\ N \cdot m = 1\ W \cdot s$; 1 N/C = 1 V/m; $1\ V = 1\ J/C = 1\ W/A = 1\ \Omega \cdot A$, etc.

Pentru a distinge mărimile fizice cu aceeaşi formulă dimensională se folosesc denumiri speciale, de exemplu, pentru momentul forţei păstrăm $1\ N \cdot m$, iar pentru lucrul mecanic 1 J ; pentru frecvenţă 1 Hz (= 1 s^{-1}) , iar pentru activitatea radiaţiilor 1 Bq (= 1 s^{-1}); pentru doza absorbită 1 Gy (= 1 J/kg), iar pentru echivalentul dozei 1 Sv (= 1 J/kg) , etc. (Hz = Hertz , Bq = Becquerel, Gy = Gray , Sv = Sievert).

În sfârşit există două unităţi suplimentare: pentru unghiul plan: 1 rad şi pentru unghiul solid (spaţial) : 1 sr (steradian).

Observăm că simbolurile unităților, care provin din nume de savanți, **se scriu cu prima literă majusculă (cu excepția unității** tolerate torr), celelalte unități **se scriu cu litere de rând (cu excepția** litrului : 1 L ≡ 1 dm^3).

Unități derivate cu denumire proprie

Mărimea	*Denumirea*	*Simb.*	*Expr. în alte unit.*	*Expresia în unit. fund.*
frecvență	hertz	Hz		s^{-1}
forță	newton	N		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
presiune, tensiune elastică	pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
energie, lucru mecanic, căldură	joule	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
putere, flux energetic	watt	W	J/s	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
sarcină electrică	coulomb	C		$s \cdot A$
potențial electric,tensiune electrică, t.e.m.	volt	V	W/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
capacitate electrică	farad	F	C/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
rezistență electrică	ohm	Ω	V/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
conductanță electrică	siemens	S	A/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
flux de inducție magnetică	weber	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
inducție magnetică	tesla	T	W/m^2	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
inductanță	henry	H	Wb/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
temperatura Celsius	grad Celsius	°C		K
flux luminos	lumen	lm		$cd \cdot sr$
iluminare	lux	lx	lm/m^2	$m^{-2} \cdot cd \cdot sr$
activitatea unui radio-nuclid	becquerel	Bq		s^{-1}
doză absorbită, ener- gie comunicată masi-că, kerma, indicele dozei absorbite	gray	Gy	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$
echivalentul dozei ab-sorbite, indicele echi-valentului dozei absorbite	sievert	Sv	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$

Unităţi derivate cu denumire combinată

Mărimea	*Denumirea*	*Simbolul*	*Expresia în unit. fundamentale*
viscozitate dinamică	pascal-secundă	Pa · s	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-1}$
momentul forţei	newton-metru	N · m	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
tensiune superficială	newton pe metru	N/m	$kg \cdot s^{-2}$
flux termic superficial, iluminare energetică	watt pe metru pătrat	W/m^2	$kg \cdot s^{-3}$
capacitate termică, entropie	joule pe kelvin	J/K	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
căldură specifică, entropie masică	joule pe kilogram-kelvin	J/(kg · K)	$m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
energie masică	joule pe kilogram	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$
conductivitate termică	watt pe metru-kelvin	W/(m · K)	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}$
densitate de energie (energie volumică)	joule pe metru cub	J/m^3	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
câmp electric	volt pe metru	V/m	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
densitate de sarcină electrică (sarcină volumică)	coulomb pe metru cub	C/m^3	$m^{-3} \cdot s \cdot A$
deplasare electrică (inducţie electrică)	coulomb pe metru pătrat	C/m^2	$m^{-2} \cdot s \cdot A$
permitivitate	farad pe metru	F/m	$m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
permeabilitate	henry pe metru	H/m	$m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
energie molară	joule pe mol	J/mol	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot mol^{-1}$
entropie molară, căldură moiară	joule pe mol-kelvin	J/(mol·K)	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$
expunere (radiaţii X, γ)	coulomb pe kilogram	C/kg	$kg^{-1} \cdot s \cdot A$
debitul dozei absorbite	gray pe secundă	Gy/s	$m^2 \cdot s^{-3}$

Unităţi derivate care folosesc şi unităţi suplimentare

Mărimea	*Denumirea*	*Simbolul*
viteză unghiulară	radian pe secundă	rad/s
acceleraţie unghiulară	radian pe secundă la pătrat	rad/s^2
intensitate energetică	watt pe steradian	W/sr
luminanţă energetică	watt pe metru pătrat-steradian	$W/(m^2 \cdot sr)$

5. Analiza dimensională. *Principiul omogenităţii dimensionale a formulelor fizicii* ne permite să găsim chiar ***forma*** unor legi fizice.

De exemplu, ştiind din experienţă că perioada de oscilaţie a unui pendul simplu gravitaţional depinde de lungimea firului de suspensie ℓ şi de acceleraţia gravitaţională g , scriem

$$T = \text{const} \cdot \ell^{\alpha} \; g^{\beta} , \qquad (8)$$

unde α şi β sunt *constante*. Trecând la dimensiuni :

$$\mathrm{T} = \mathrm{L}^{\alpha} (\mathrm{LT}^{-2})^{\beta} = \mathrm{L}^{\alpha+\beta}\, \mathrm{T}^{-2\beta} . \qquad (9)$$

Prin identificarea exponenţilor din stânga şi dreapta, găsim :

$$0 = \alpha + \beta , \quad 1 = - 2\beta , \text{ de unde } \alpha = 1/2 , \quad \beta = - 1/2 ,$$

deci perioada de oscilaţie a pendulului simplu gravitaţional :

$$T = \text{const} \cdot \ell^{1/2} g^{-1/2} = \text{const} \sqrt{\ell/g} , \qquad (10)$$

unde const este o constantă de ordinul unităţii (ştim că este 2π).

6. Multipli şi submultipli. Pentru multiplii şi submultiplii diferitelor unităţi se folosesc următoarele prefixe :

Multipli	*prefix*	*unităţi*	*Submultipli*	*prefix*	*unităţi*
deca	da	10	deci	d	10^{-1}
hecto	h	10^{2}	centi	c	10^{-2}
kilo	k	10^{3}	mili	m	10^{-3}
mega	M	10^{6}	micro	μ	10^{-6}
giga	G	10^{9}	nano	n	10^{-9}
tera	T	10^{12}	pico	p	10^{-12}
peta	P	10^{15}	femto	f	10^{-15}
exa	E	10^{18}	atto	a	10^{-18}

Nu se folosesc simultan două prefixe la aceeaşi unitate şi se recomandă a nu se folosi prefixe la numitor.

7. Unităţi tolerate. Câteva exemple de unităţi *tolerate*.

Litrul cu simbolul L este definit din 1979 ca fiind ***identic*** cu 1 dm^3: $\quad 1\ \mathrm{L} \equiv 1\ \mathrm{dm}^3$.

Kilogramul-forţă şi ***atmosfera tehnică*** :

1 kgf = 9,806 65 N ; 1 at ≡ 1 $\mathrm{kgf/cm^2}$ =98 066,5 Pa ≈ 98 kPa.

Torrul sau **mm Hg** este presiunea exercitată de o coloană de mercur înaltă de 1 mm, la temperatura de 0°C, în câmpul gravitaţional *normal* (standard) g_n = 9,806 65 $\mathrm{m/s^2}$:

1 torr ≡ 1 mm Hg =133,322 Pa ≈133,3 Pa .

Atmosfera fizică : 1 atm = 760 torr =101 325 Pa ≈ 101,3 kPa .

* *

ELEMENTE DE CALCUL AL ERORILOR

În cercetările de fizică experimentală distingem două feluri de determinări de mărimi fizice : 1) *Măsurători directe*, de exemplu, măsurarea lungimilor cu o riglă, a maselor cu o balanță, a temperaturilor cu un termometru, a duratelor cu un cronometru, a forțelor cu un dinamometru, a curentului electric cu un ampermetru, a tensiunii electrice cu un voltmetru, etc. 2) *Măsurători indirecte*, când mărimea fizică se obține prin *calcul*, folosind rezultatele unor măsurători directe şi aplicând anumite relații matematice, deduse pe baza legilor fizicii, de exemplu, măsurarea accelerației, lucrului mecanic, coeficientului de frecare, momentului de inerție, constantelor elastice, a căldurii, coeficienților calorici, etc.

1. CLASIFICAREA ERORILOR

Orice măsurătoare fizică implică totdeauna erori. Distingem :

1) *Erori de măsură* (erori inevitabile). Acestea se datorează imperfecțiunii simțurilor şi a aparatelor. Valorile citite pe un aparat de măsură sunt doar mai mult sau mai puțin apropiate de valoarea exactă, evident necunoscută, a mărimii măsurate. Aceste erori nu pot fi cunoscute exact, dar ele nu pot depăşi eroarea maximă, corespunzătoare preciziei aparatului folosit.

Uneori în calcule se folosesc anumite *constante fizice*, extrase din *Tabele* speciale publicate. Aceste constante au în general erori foarte *mici*, neglijabile (dacă păstrăm un număr suficient de cifre) față de erorile mărimilor măsurate în mod obişnuit într-un laborator pentru elevi sau studenți.

2) *Erori de rotunjire*. În calcule pot interveni numere *iraționale*, având o *infinitate* de zecimale (radicali, π , e , logaritmi, funcții trigonometrice, exponențiale). Evident, suntem nevoiți să păstrăm în calcule un număr *limitat* de zecimale. Eroarea comisă se poate neglija dacă păstrăm un număr suficient de zecimale.

3) *Erori de metodă*. Adesea suntem nevoiți să înlocuim problema dată (propusă) cu alta mai simplă (aproximativă), ceea ce implică evident o anumită eroare, chiar dacă datele inițiale ar fi cunoscute exact şi calculele ar fi făcute exact.

Erorile se mai pot clasifica în:

1) *Erori sistematice*. Aceste erori se caracterizează prin faptul că se produc totdeauna *în acelaşi sens*. Deosebim : a) erori *instrumentale*, datorite defecțiunii aparatelor, de exemplu, etalonarea defectuoasă a aparatului de măsură, deplasarea scalei etc. ; b) erori *personale*, datorite unor lipsuri în deprinderile şi dexteritatea experimentatorului ; c) erori *teoretice*, datorite neglijării unor factori fizici sau unor acțiuni exterioare permanente sau datorite formulei de calcul imprecise sau greşite. Erorile sistematice pot fi reduse, introducând *corecții* adecvate.

2) *Erori accidentale* (întâmplătoare, aleatorii). Aceste erori se caracterizează prin faptul că se produc atât într-un sens cât şi în celălalt şi se datorează unor factori variabili sau nedeterminați, care nu pot fi controlați de experimentator, adică se datoresc *întâmplării*.

3) *Erori grosolane* sau greşeli. Aceste erori sunt mult mai mari decât erorile obişnuite şi se datoresc neatenției experimentatorului: citire greşită la un aparat, notație greşită a rezultatului, confuzie, omisiuni. Aceste erori pot fi recunoscute relativ uşor şi eliminate din considerație.

2. ERORI ABSOLUTE ŞI ERORI RELATIVE

Măsurând o mărime fizică X găsim o anumită valoare numerică x, apropiată mai mult sau mai puțin de valoarea exactă x_0 (evident necunoscută) a mărimii măsurate.

Se numeşte ***eroare absolută*** diferența (abaterea) $\delta x = x_0 - x$ dintre valoarea exactă şi valoarea măsurată.

Necunoscându-l pe x_0, nu putem cunoaşte exact nici pe $x_0 - x$, dar putem totdeauna evalua marginea superioară a erorilor absolute, după cum vom vedea.

Se numeşte ***eroare relativă*** raportul :

$$\frac{x_0 - x}{x_0} = \frac{\delta x}{x_0} \qquad (1)$$

dintre eroarea absolută şi valoarea exactă a mărimii măsurate.

De obicei erorile sunt mici, adică $|\delta x| \ll x_0$, $x \approx x_0$, astfel încât practic se foloseşte *eroarea relativă aparentă* :

$$\varepsilon_x = \frac{x_0 - x}{x} = \frac{\delta x}{x} , \qquad (2)$$

unde eroarea absolută δx (care se poate evalua) este raportată la valoarea ***măsurată*** (deci *cunoscută*).

Eroarea absolută se măsoară în aceleaşi unităţi ca şi mărimea însăşi, în timp ce eroarea relativă nu are dimensiuni şi se exprimă adesea în procente. Eroarea *relativă* caracterizează mai bine precizia unei măsurători şi, fiind *adimensională*, permite compararea preciziei de măsurare a mărimilor de naturi diferite. De exemplu, distanţa Bucureşti - Ploieşti (60 km) măsurată cu o eroare absolută de 6 m înseamnă o eroare relativă de 0,01 % , pe când o clădire de 60 m măsurată cu aceeaşi eroare absolută de 6 m înseamnă de fapt o măsurătoare foarte grosolană faţă de cea precedentă, deoarece acum eroarea relativă este de 10 % .

3. ROTUNJIRI

1) ***Rotunjiri***. Am arătat necesitatea de a păstra în calcule un număr limitat de cifre. Pentru a comite o eroare minimă se respectă următoarea ***regulă*** :

Dacă cifra neglijată este mai mare decât 5, *se adaugă o unitate la cifra precedentă păstrată, iar dacă cifra neglijată este mai mică decât 5, nu se adaugă nimic*

Exemplu :

$$2{,}804\,953 \rightarrow 2{,}804\,95 \rightarrow 2{,}805\,0 \rightarrow 2{,}805 \rightarrow 2{,}80 \rightarrow 2{,}8 \rightarrow 3 . \qquad (3)$$

Eroarea comisă prin rotunjire nu depăşeşte evident 0,5 din valoarea unităţii din ultima cifră păstrată.

2) ***Cifre "exacte"***. O cifră a unui număr se consideră "***exactă***", dacă valoarea unei unităţi din această cifră este mai *mare* decât eroarea absolută a numărului. Cifra "exactă" este cifra *optimă*, care corespunde erorii ***minime***, în sensul că, dacă mărim sau micşorăm această cifră, eroarea va creşte.

De exemplu, prin rotunjirea numerelor iraţionale toate cifrele vor fi "exacte". Ultima cifră "exactă" poate să nu fie *strict* exactă, dar în orice caz nu diferă de cea strict exactă prin mai mult decât o unitate.

3) ***Regulă de scriere a numerelor aproximative.*** Dacă *nu indicăm* eroarea absolută, atunci printr-un număr adecvat de rotunjiri trebuie să scriem numărul astfel încât eroarea să nu depăşească valoarea unei unităţi din ultima cifră scrisă, *toate cifrele fiind deci "exacte"*. La nevoie se foloseşte factorul 10^k, k fiind un întreg convenabil. Dacă *indicăm* eroarea absolută a numărului, atunci pe lângă cifrele "exacte" se mai scrie şi cifra următoare, numită *cifră "îndoielnică"*. *Este inutil să scriem şi cifrele următoare deoarece sunt **inexacte**. Vom scrie deci numărul cu tot atâtea zecimale câte zecimale are eroarea absolută*

Exemplu. Sarcina elementară este $e = (1{,}602\,177\,3 \pm 1) \cdot 10^{-19}$ C. Dacă nu indicăm eroarea, trebuie să scriem numărul de exemplu astfel :

$$1{,}602\,177 \cdot 10^{-19} \approx 1{,}602\,2 \cdot 10^{-19} \approx 1{,}60 \cdot 10^{-19} = 160 \cdot 10^{-21} \text{ C.} \quad (4)$$

În ultimele două expresii cifra 0 este cifră "exactă" , adică eroarea numărului scris astfel este sub $0{,}01 \cdot 10^{-19} = 1 \cdot 10^{-21}$ C , adică

$$1{,}59 \cdot 10^{-19} \leq e \leq 1{,}61 \cdot 10^{-19} \text{ sau } 159 \cdot 10^{-21} \leq e \leq 161 \cdot 10^{-21}.$$

Ar fi incorect să scriem de exemplu $e = 160\,000 \cdot 10^{-24}$ C fără a indica eroarea, deoarece ar rezulta că eroarea numărului scris astfel este sub $1 \cdot 10^{-24}$ C, adică $159\,999 \cdot 10^{-24} \leq e \leq 160\,001 \cdot 10^{-24}$ C, ceea ce este greşit (în partea dreaptă).

4. ***Cifre semnificative.*** Se numesc ***cifre semnificative*** toate cifrele "exacte" şi cifra "îndoielnică" ale numărului scris conform regulii precedente, *fără* a socoti zerourile *din fața* numărului, care indică doar ordinul cifrelor următoare şi pot fi totdeauna eliminate folosind un factor 10^k , k - număr întreg (deci mutând virgula convenabil). De exemplu, coeficientul de tensiune superficială al apei

$$\sigma = 0{,}073 \text{ N/m} = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N/m} = 73 \text{ mN/m} \quad (5)$$

are *două* cifre semnificative.

Dacă, de exemplu, cerem o masă de 27,5 g cântărită cu o precizie de 1 mg, trebuie să scriem m=27,500 g. Ultimele două zerouri sunt cifre semnificative ("exacte") şi trebuie neapărat scrise.

Dacă un rezultat experimental este scris sub forma x =0,000 3, deşi sunt *patru* zecimale, precizia este *grosolană*, întrucât avem o *singură* cifră semnificativă 3 , adică $x = (3 \pm 1) \cdot 10^{-4}$ şi eroarea relativă este $\varepsilon_x = 1/3 = 33$ %. Situația se schimbă radical dacă rezultatul este scris sub forma $x = 0{,}000\,30 = 30 \cdot 10^{-5}$, deoarece acum

ultimul zero este cifră semnificativă: $x = (30 \pm 1) \cdot 10^{-5}$ şi eroarea relativă este $e_x = 1/30 = 3,3\ \%$.

Nu importă numărul zecimalelor (adică poziția virgulei), ci numărul cifrelor semnificative.

Observație. Eroarea absolută, indicând un domeniu de nedeterminare, nu trebuie nici adăugată, nici scăzută din numărul considerat, ci *scrisă în continuare cu semnul* ± *şi în aceleaşi unități.*

Exemplu. Prin înmulțire, împărțire, extragere de radical, etc., apar multe cifre. Chiar dacă *toate* cifrele inițiale sunt *riguros exacte*, nu toate cifrele rezultatului sunt exacte ! (ceea ce pare la prima vedere paradoxal). Iată un exemplu:

Am cântărit (de exemplu, cu o balanță analitică) un vas calorimetric din alamă : m = 40,45 g , unde *toate* cifrele sunt *riguros exacte*. Căldura specifică a alamei c = 0,37 J/(g·K) (luată din Tabele), unde iarăşi *toate* cifrele sunt *riguros exacte*. Să calculăm capacitatea calorică a vasului calorimetric.

$C = mc$:

```
   40,45
    0,37
  ------
   28315
  12135
  ------
 14,9665
```

C = 14,9665 J/K .

La prima vedere, *toate* cifrele acestui rezultat ar trebui să fie riguros *exacte*, din moment ce *toate cifrele* factorilor au fost *riguros exacte*. În realitate *nu* este aşa !

În numărul m = 40,45 g noi nu cunoaştem cifra care urmează după 5 (de exemplu, n-am putut-o măsura), la fel în numărul c = = 0,37 J/(g·K) nu cunoaştem cifra care urmează după 7. Să înlocuim aceste cifre cu semne de întrebare şi să efectuăm din nou înmulțirea :

```
    40,45?
     0,37?
  --------
     ?????
   28315?
  12135?
  --------
  14,9665??
      ???
```

Se vede că ultimele 3 cifre , 665, ***nu sunt exacte***, ba chiar cifra 9 ar putea creşte cu o unitate posibilă de la cifra următoare. De aceea, rezultatul trebuie rotunjit, eliminând ultimele 3 cifre :

$C = 14{,}9665 \approx 15{,}0$ J/K.
Aici cifra 0 ***trebuie păstrată,*** *fiind cifră semnificativă* .

4. FORMULE PENTRU CALCULE APROXIMATIVE

Calculul erorilor este un calcul *aproximativ de evaluare* a erorilor, de aceea se fac *aproximații* pe deplin justificate. Dăm mai jos câteva formule utile.

a) $$(1 + x)(1 + y)(1 + z) \ldots \approx 1 + x + y + z \ldots, \qquad (6)$$

dacă $|x| \ll 1$, $|y| \ll 1$, $|z| \ll 1, \ldots$

Formula se obține ușor, desfăcând parantezele, păstrând termenii liniari (de gradul 1) și neglijând termenii de grad superior care sunt mici.

$$\frac{1}{1 \pm x} = \frac{1 \mp x}{1 - x^2} \approx 1 \mp x \text{ , dacă } |x| \ll 1 ; \qquad (7)$$

$$\frac{1}{a \pm b} = \frac{1}{a(1 \pm b/a)} \approx \frac{1}{a}\left(1 \mp \frac{b}{a}\right) \text{ , dacă } |b| \ll |a| \text{ , adică } |b/a| \ll 1 ;$$

$$\sqrt{1 \pm x} \approx \sqrt{1 \pm x + x^2/4} = \sqrt{(1 \pm x/2)^2} = 1 \pm x/2 \text{ , dacă } |x| \ll 1 ;$$

$$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{a(1 \pm b/a)} \approx \sqrt{a}\left(1 \pm \frac{b}{2a}\right) = \sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}} \text{ ,dacă } |b| \ll a > 0. \qquad (8)$$

$$\frac{(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)\cdots}{(1 + y_1)(1 + y_2)(1 + y_3)\cdots} \approx 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots - y_1 - y_2 - y_3 - \cdots, \qquad (9)$$

dacă $|x_i| \ll 1$, $|y_i| \ll 1$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Exemplu. Presiunea atmosferică H în **torr**, în funcție de înălțimea barometrică B, în **mm** (citită pe o riglă etalonată la 0°C), coeficientul de dilatare liniară α al riglei și coeficientul de dilatare β al mercurului este : $H_{[\text{torr}]} = B_{[\text{mm}]} \cdot (1 + \alpha\, t) : (1 + \beta\, t) \approx$

$$\approx B(1 + \alpha\, t) \cdot (1 - \beta\, t) \approx B[1 + (\alpha - \beta)\, t] ,$$

deoarece $\alpha\, t \ll 1$ și $\beta\, t \ll 1$.

b) Mai general :

$$(1 + x)^r \approx 1 + rx + (1/2)r(r - 1)x^2 \approx 1 + r\,x \text{ , dacă } |x| \ll 1 , \qquad (10)$$

unde r este un număr real ($r \in \mathbf{R}$) de ordinul unităților .

Formula se obține din dezvoltarea în serie a binomului, păstrând **primii termeni. De exemplu,**

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = (1 \pm x)^{-1/2} \approx 1 \mp x/2 \text{, dacă } |x| \ll 1 \text{, (aici } r = -1/2).$$

c) Din dezvoltările în serie de puteri ale diferitelor funcții (trigonometrice, exponențiale, logaritmice, funcțiile lor inverse, etc.), păstrând primii termeni, obținem formule de aproximație :

$\sin x \approx x - x^3/6 \approx x$; $\cos x \approx 1 - x^2/2 \approx 1$; $\text{tg}\, x \approx x + x^3/3 \approx x$,

unde x este în ***radiani*** şi $|x| \ll 1$ rad, adică $x < 6^\circ$,

$$1 \text{ rad} = 360^\circ/(2\pi) = 180^\circ/\pi = 57^\circ 17' 44'',8 \approx 57^\circ.$$

$$e^x \approx 1 + x + x^2/2 \approx 1 + x \text{, dacă } |x| \ll 1, \tag{11}$$

$$a^x = e^{x \ln a} \approx 1 + x \ln a \text{, dacă } |x \ln a| \ll 1,$$

$$\ln(1 + x) \approx x - x^2/2 \approx x \text{, dacă } |x| \ll 1. \tag{12}$$

5. ERORI DE CITIRE

1. Prin *erori de **citire*** vom înțelege erorile de *măsură **directă*** a unei mărimi fizice, de exemplu, măsurarea lungimii cu o riglă, a timpului cu un cronometru, a masei cu o balanță, a temperaturii cu un termometru, a curentului electric cu un ampermetru, etc.

Evident, nu putem cunoaşte exact eroarea de citire, dar putem totdeauna *evalua eroarea maximă* de citire, care nu poate depăşi precizia aparatului folosit. Dacă pe aparat nu este indicată precizia sa, putem lua drept eroare absolută maximă de citire valoarea *celei mai mici diviziuni* în care este gradată scala aparatului sau chiar 0,5 din această valoare. Într-adevăr, aparatele de măsură (riglele, cronometrele, termometrele, voltmetrele, etc.) se fabrică în serie, admițându-se anumite toleranțe ale preciziei indicațiilor, prin comparație cu etaloane speciale. Este inutilă gradarea scalei aparatului în diviziuni mai fine decât precizia lui, întrucât cifrele corespunzătoare acestora oricum n-ar fi sigure (la fel cum este inutilă scrierea zecimalelor neprecise ale unui număr aproximativ).
Chiar dacă precizia aparatului ar fi mai înaltă decât valoarea celei mai mici diviziuni, tot n-am putea aprecia exact, cu ochiul liber, fracțiuni *mai mici decât o jumătate* din diviziunea *cea mai mică* marcată pe scală. De aceea se ia drept *eroare **maximă** de citire **jumătate** din valoarea celor mai mici diviziuni* marcate pe scală.

Exemple. La măsurarea lungimilor cu o riglă obişnuită putem lua $\delta x \approx 0{,}5$ mm ; dacă avem un *vernier* 1/10, atunci $\delta x \approx 0{,}05$ mm. La cronometrări putem lua $\delta t \approx 0{,}2$ s sau chiar mai mult datorită timpilor morţi la pornire şi oprire. La cântăriri putem lua pentru δm jumătate din valoarea celei mai mici mase marcate, la care mai este sensibilă (răspunde) balanţa. La citiri de temperatură, δt va fi jumătate din valoarea diviziunii minime în care este gradat termometrul folosit.

2.*Erori accidentale*. Dacă măsurăm o mărime X (lungime, masă etc.) ***repetat*** de N ori, în *aceleaşi* condiţii şi cu *aceeaşi* precizie (cu acelaşi aparat, cu aceeaşi conştiinciozitate etc.), vom obţine valori numerice x_i , $i = 1, 2, 3, ..., N$, împrăştiate (grupate) în jurul valorii reale x_0 .

Erorile ***accidentale*** se bucură de două proprietăţi importante :
1) Valorile numerice x_i sunt împrăştiate ***simetric*** (în cazul unui număr *suficient* de măsurători: $N \approx 10 ...15$) în jurul valorii reale x_0.
2) Erorile mari în modul sunt puţin numeroase (rare), în timp ce erorile mici în modul sunt mai numeroase (frecvente).

Se poate arăta că pentru un şir de N măsurători de *egală* precizie *valoarea cea mai probabilă* sau ***cea mai bună*** a mărimii măsurate este ***media aritmetică*** a rezultatelor obţinute :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad . \tag{13}$$

Eroarea *mediei aritmetice* este mai mică de $\sqrt{N}$ ori (dacă $N > 10$) decât eroarea unei măsurători individuale (izolate). O măsură a erorii mediei aritmetice ($N > 10$) este dată de ***eroarea pătratică medie*** :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{x} - x_i\right)^2} \quad . \tag{14}$$

Atunci rezultatul final al unui ***şir*** de măsurători se scrie sub forma:

$$x = \bar{x} \pm \sigma \quad .$$

Observaţie. Rezultatele x_i care sunt în ***totală discrepanţă*** cu $\bar{x}$ sunt ***erori grosolane*** (greşeli datorite neatenţiei) şi trebuiesc eliminate. Cu datele rămase se recalculează media aritmetică şi eroarea pătratică medie.

6. ERORILE FUNCŢIILOR

1. Majoritatea mărimilor fizice se măsoară *indirect*, adică se determină prin *calcul* cu ajutorul unei formule în care intră mărimi ce sunt măsurate direct. Ştiind erorile argumentelor trebuie să calculăm eroarea care rezultă pentru funcţie. În special ne interesează eroarea *maximă* a funcţiei, cunoscând erorile *maxime* ale argumentelor.

Este comod să notăm în cele ce urmează cu δx ***modulul*** erorii absolute şi cu ε_x ***modulul*** erorii relative, adică

$$\delta x = |x_0 - x| \quad \text{sau} \quad x_0 - x = \pm\,\delta x \quad \text{sau}\ x_0 = x \pm \delta x\,, \tag{15}$$

$$\varepsilon_x = \delta x : |x| \quad \text{sau} \quad (x_0 - x) : x = \pm\,\varepsilon_x\,.$$

Vom presupune de asemenea că erorile sunt suficient de *mici*, adică

$$\delta x \ll |x|\,, \qquad \varepsilon_x \ll 1\,, \tag{16}$$

astfel încât putem folosi formule pentru calcule ***aproximative***.

2. Să calculăm întâi erorile *maxime* ale funcţiilor simple.

a) ***Sumă***. Fie suma algebrică :

$$f = ax + by \quad \text{cu valoarea exactă} \quad f_0 = ax_0 + by_0\,, \tag{17}$$

unde a, b sunt constante *exacte*. Eroarea absolută este

$$f_0 - f = a(x_0 - x) + b(y_0 - y) = \pm\, a\delta x \pm b\delta y\,.$$

Cazul *cel mai nefavorabil* are loc atunci când erorile absolute ale variabilelor x, y au acelaşi semn cu coeficienţii respectivi a, b, de unde rezultă eroarea ***maximă*** :

$$\delta f = \delta(ax + by) = |a|\,\delta x + |b|\,\delta y\,; \quad \varepsilon_f = \delta f : |f|\,. \tag{18}$$

În particular, dacă $f = a\cdot x$, atunci $\delta f = |a|\cdot\delta x$; (18')

şi cazul *diferenţei*, pe care îl vom trata şi separat :

$$f = x - y\,, \quad \delta f = \delta(x - y) = \delta x + \delta y\,. \tag{18''}$$

Observaţie. La adunarea mai multor numere, termenul cu număr minim de zecimale (deci cu eroarea absolută maximă) se lasă neschimbat, iar ceilalţi temeni se *rotunjesc*, păstrând o zecimală în plus faţă de termenul grosolan (aceste zecimale vor da cifra “îndoielnică” a rezultatului).

b) ***Diferenţă***. Asemănător sumei avem :

$$f = x - y\,, \quad f_0 = x_0 - y_0\,, \quad f_0 - f = (x_0 - x) - (y_0 - y) = \pm\,\delta x \mp \delta y\,.$$

Cazul *cel mai nefavorabil* are loc atunci când erorile absolute ale termenilor sunt de semne opuse şi deci se adună, de unde eroarea ***maximă*** :

$$\delta f = \delta(x - y) = \delta x + \delta y \,, \quad \varepsilon_f = (\delta x + \delta y) : |x - y| \,. \qquad (19)$$

Cazul diferenţei este un caz particular al sumei algebrice de la punctul precedent (punând $a = 1$, $b = -1$) .

Dacă x şi y sunt apropiaţi între ei, eroarea ***relativă maximă a diferenţei*** va fi foarte ***mare*** (din cauza *numitorului mic* !), chiar dacă erorile relative ale termenilor sunt mici. Acest fapt trebuie totdeauna avut în vedere, *evitând determinarea unei mărimi ca diferenţă a două mărimi apropiate.*

De exemplu, dacă creşterea de temperatură într-un vas calorimetric este *mică* , de la $t_1 = 19{,}3 \pm 0{,}1$ °C la $t_2 = 19{,}7 \pm 0{,}1$°C, atunci eroarea *relativă* a *diferenţei* $\Delta t = t_2 - t_1$ va fi :

$$\varepsilon_{\Delta t} = (\delta t_1 + \delta t_2) : (t_2 - t_1) = 2\,\delta t : (t_2 - t_1) =$$
$$= 2 \cdot 0{,}1 : (19{,}7 - 19{,}3) = 0{,}5 = 50\ \% \,,$$

deşi citirile t_1, t_2 au fost făcute cu o precizie de 100 ori mai bună : $\varepsilon_t \approx 0{,}1 / 20 = 0{,}005 = 0{,}5\ \%$!

c) ***Produs***. Pentru un produs de doi factori avem :

$$f = x \cdot y \,, \quad f_0 - f = x_0 y_0 - xy = x(y_0 - y) + y(x_0 - x) + (x_0 - x)(y_0 - y) =$$
$$= \pm\, x\delta y \pm y\delta x \pm \delta x\, \delta y \approx \pm\, x\delta y \pm y\delta x \,,$$

unde am neglijat ultimul termen, erorile fiind presupuse *mici*. Eroarea *maximă* (cazul *cel mai nefavorabil*) va fi:

$$\delta f = \delta(x\, y) = |x|\, \delta y + |y|\, \delta x \,; \quad \varepsilon_f = \delta f : |x\, y| = \varepsilon_x + \varepsilon_y \,, \qquad (20)$$

deci ***se adună erorile relative ale factorilor .***

d) ***Cât***. Analog produsului avem :

$$f = x / y \,, \quad f_0 - f = x_0 / y_0 - x / y = (y x_0 - x y_0) : (y\, y_0) =$$
$$= [y(x_0 - x) - x(y_0 - y)] : (y y_0) = [\, \pm\, y\delta x \mp x\delta y] : [y(y \pm \delta y)] \approx$$
$$= (\pm\, y\delta x \mp x\delta y) : y^2 \,,$$

de unde eroarea *maximă* (cazul *cel mai nefavorabil*) :

$$\delta f = \delta(x / y) = [|y|\, \delta x + |x|\, \delta y] : y^2 \,; \quad \varepsilon_f = \delta f : |f| = \varepsilon_x + \varepsilon_y \,, \qquad (21)$$

deci şi în acest caz *se **adună** erorile relative ale factorilor* (câtului).

Observaţie. Pentru ca o expresie de tip *produs-cât* să aibă sigur n cifre exacte trebuie ca factorii să aibă $n + 2$ cifre exacte.

e) ***Putere***. Să considerăm o funcţie *putere* $f = x^r$, unde r este un număr *real exact* (pentru funcţia *radical* $r < 1$). Atunci

$$f_0 - f = x_0^r - x^r = (x \pm \delta x)^r - x^r = x^r(1 \pm \varepsilon_x)^r - x^r \approx$$
$$\approx x^r(1 \pm r\varepsilon_x) - x^r = \pm r x^r \varepsilon_x$$

(am folosit formula de aproximaţie (10)), de unde rezultă eroarea

$$\delta f = \delta x^r = r x^r \varepsilon_x , \quad \varepsilon_f = \delta f : x^r = |r| \varepsilon_x , \qquad (22)$$

adică *eroarea relativă maximă a unei puteri este egală cu eroarea relativă a bazei înmulţită cu exponentul* (în modul) .

Pentru funcţiile simple de mai sus se calculează întâi eroarea absolută şi apoi cu ajutorul acesteia eroarea relativă. Pentru funcţii mai complicate de tip produs – cât – putere se calculează mai întâi eroarea relativă după regula de mai jos şi apoi cu ajutorul acesteia eroarea absolută.

Regulă. *Eroarea* ***relativă maximă*** *a unui produs-cât de factori la diferite puteri se obţine adunând erorile relative ale factorilor, multiplicate cu exponenţii respectivi* (*în modul*).

Exemple. a) Diametrul necunoscut d_2 al unui tub capilar se determină pe baza diametrului cunoscut d_1 al unui tub capilar de referinţă şi a ascensiunilor capilare h_1 , h_2 : $d_2 = d_1 \cdot h_1 / h_2$, de unde eroarea relativă maximă este, conform regulii :

$$\varepsilon_{d_2} = \varepsilon_{d_1} + \varepsilon_{h_1} + \varepsilon_{h_2} \approx \varepsilon_{h_1} + \varepsilon_{h_2} = \delta h_1 / h_1 + \delta h_2 / h_2 =$$
$$= \delta h\,(1 / h_1 + 1 / h_2) , \quad (\delta h_1 \approx \delta h_2) ,$$

unde am neglijat ε_{d_1} , diametrul d_1 al tubului etalon fiind cunoscut cu suficientă precizie.

2). Modulul de elasticitate al lui Young E se determină pe baza alungirii $\Delta\ell$ a unui fir de lungime ℓ_0 şi secţiune S_0, supus forţei de întindere F : $E = F\,\ell_0 : (S_0\,\Delta\ell)$, de unde eroarea relativă maximă :

$$\varepsilon_E = \varepsilon_F + \varepsilon_{\ell_0} + \varepsilon_{S_0} + \varepsilon_{\Delta\ell} \approx \varepsilon_{\Delta\ell} = \delta(\ell - \ell_0) : (\ell - \ell_0) = 2\delta\ell : (\ell - \ell_0) ,$$

unde erorile *relative* a forţei F (dată de greutăţile marcate), a lungimii ℓ_0 şi a secţiunii date S_0 pot fi neglijate (nu însă $\delta\ell_0 \approx \delta\ell$ din expresia lui $\varepsilon_{\Delta\ell}$) .

3). Perioada pendulului simplu gravitaţional T este dată de formula : $T = 2\pi\sqrt{\ell/g} = 2\pi\,\ell^{1/2} g^{-1/2}$, de unde eroarea relativă maximă : $\varepsilon_T = \varepsilon_\pi + (1/2)\,\varepsilon_\ell + (1/2)\,\varepsilon_g \approx (1/2)\,\varepsilon_\ell$,

unde erorile pentru π , g se pot neglija dacă luăm un număr suficient de zecimale.

4) Constanta elastică k a unui resort se determină fie static pe baza alungirii x sub acțiunea greutății mg, fie dinamic pe baza perioadei T a oscilațiilor verticale ale unei greutăți :

$$k = mg / x \quad \text{sau} \quad k = 4\pi^2 m / T^2 ,$$

de unde eroarea relativă maximă :

$$\varepsilon_k = \varepsilon_m + \varepsilon_g + \varepsilon_x \approx \varepsilon_x \quad \text{sau} \quad \varepsilon_k = 2\varepsilon_\pi + \varepsilon_m + 2\varepsilon_T \approx 2\varepsilon_T ,$$

unde se pot neglija erorile masei marcate m , a lui g şi π (luând un număr suficient de zecimale).

5) Perioada bătăilor T la pendule cuplate se calculează cu ajutorul perioadelor proprii T_1, T_2 : $T_b = T_1 T_2 : (T_1 - T_2)$,

de unde eroarea maximă :

$$\varepsilon_{T_b} = \varepsilon_{T_1} + \varepsilon_{T_2} + \varepsilon_{(T_1 - T_2)} = \varepsilon_{T_1} + \varepsilon_{T_2} + \delta(T_1 - T_2) : |T_1 - T_2| =$$

$$= \varepsilon_{T_1} + \varepsilon_{T_2} + (\delta T_1 + \delta T_2) : |T_1 - T_2| \approx 2\delta T : |T_1 - T_2| ,$$

eroarea de determinare a perioadelor fiind practic aceeaşi. Deoarece T_1 şi T_2 sunt apropiate între ele, ultimul termen dă o eroare mare.

6) Densitatea liniară ρ_ℓ a unei coarde vibrante de lungime ℓ , întinsă de o forță F este : $\rho_\ell = F : (4\, \ell^2 \nu^2)$,

de unde eroarea relativă maximă :

$$\varepsilon_{\rho_\ell} = \varepsilon_F + 2\, \varepsilon_\ell + 2\, \varepsilon_\nu \approx \varepsilon_F + 2\, \varepsilon_\ell ,$$

unde am neglijat eroarea frecvenței ν de vibrație a coardei .

3. În cazul unor funcții *oarecare*, de exemplu, al funcțiilor trigonometrice, logaritmice, exponențiale etc., se aplică calculul *diferențial*, asimilând diferențialele cu erori, presupuse *mici*.

Presupunem că funcția este continuă şi cu derivate parțiale continue în domeniul considerat.

Fie o funcție de două variabile $f = f(x,y)$, valoarea exactă fiind $f_o = f(x_o , y_o)$. Se dezvoltă funcția în serie tayloriană în jurul valorilor (x, y) păstrând doar termenii liniari :

$$f(x_o , y_o) \approx f(x,y) + (x_o - x) \frac{\partial f}{\partial x} + (y_o - y) \frac{\partial f}{\partial y} ,$$

$$f_o - f \approx \pm\, \delta x \frac{\partial f}{\partial x} \pm \delta y \frac{\partial f}{\partial y} .$$

Cazul *cel mai nefavorabil* are loc atunci când erorile argumentelor au acelaşi semn cu derivatele parțiale respective, de unde eroarea maximă :

$$\delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \delta y \ .$$

Putem raţiona şi altfel. Anume, diferenţiem funcţia :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \ ,$$

asimilăm diferenţialele cu erori (considerate *mici*): $dx \to \delta x$,... şi luăm cazul *cel mai nefavorabil* pentru a obţine eroarea *maximă* :

$$\delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \delta z \ . \qquad (23)$$

Putem obţine şi pe această cale formulele pentru funcţiile simple:

$f = ax + by$, $df = adx + bdy \to \delta f = |a|\,\delta x + |b|\,\delta y$;

$f = x - y$, $df = dx - dy \to \delta f = \delta x + \delta y$;

$f = x \cdot y$, $df = x\,dy + y\,dx \to \delta f = |x|\,\delta y + |y|\,\delta x$;

$f = x / y$, $df = (y\,dx - x\,dy) : y^2 \to \delta f = (|y|\,\delta x + |x|\,\delta y) : y^2$.

Pentru expresii de tip produs – cât – putere se calculează întâi eroarea *relativă*. Pentru aceasta este comod să logaritmăm în prealabil funcţia şi apoi să diferenţiem (derivata "*logaritmică*") (ştiind că $d \ln x = dx / x$) :

$f = x y z$, $\ln f = \ln x + \ln y + \ln z$, $df / f = dx / x + dy / y + dz / z \to$
$\to \delta f / |f| = \delta x / |x| + \delta y / |y| + \delta z / |z|$, $\varepsilon_f = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$;

$f = x / (yz)$, $\ln f = \ln x - \ln y - \ln z$, $df / f = dx / x - dy / y - dz / z \to$
$\to \delta f / |f| = \delta x / |x| + \delta y / |y| + \delta z / |z|$, $\varepsilon_f = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$;

$f = x^r$, $\ln f = r \ln x$, $df / f = r\,dx / x \to \delta f / |f| = r\,\delta x / |x|$, $\varepsilon_f = |f|\,\varepsilon_x$.

Se regăseşte astfel *regula de* ***adunare*** *a erorilor* ***relative*** *pentru expresii de tip* ***produs-cât***.

Exemple. 1) Ascensiunea capilară h este dată de formula (*Jurin*) : $h = (2\sigma \cos \vartheta) : (\rho\, g r)$, unde ϑ este unghiul de *racordare* (*umectaţie*). Eroarea relativă maximă este

$\varepsilon_h = \varepsilon_\sigma + \varepsilon_{\cos \vartheta} + \varepsilon_\rho + \varepsilon_g + \varepsilon_r$, unde

$\varepsilon_{\cos \vartheta} = (\delta \cos \vartheta) : |\cos \vartheta| = (|\sin \vartheta| \cdot \delta\vartheta) : |\cos \vartheta| = |\mathrm{tg}\, \vartheta| \cdot \delta\vartheta$.

2) Nivelul sonor L (în decibeli) este definit prin intensităţile sono-re I_o (pragul auditiv inferior la 1000 Hz) şi I astfel: $L = 10 \lg(I / I_o)$, de unde eroarea maximă: $\delta L = 10\, \delta(\lg I - \lg I_o) =$
$= 10\, (\delta I / I + \delta I_o / I_o) \cong 10\, \delta I\, (1 / I + 1 / I_o)$, $(\delta I \cong \delta I_o)$.

7. RECOMANDĂRI PRACTICE

Pentru a uşura munca de calcul şi a evita greşeli trebuie respectate câteva reguli practice.

1. Precizia calculelor trebuie să corespundă preciziei datelor iniţiale, adică preciziei măsurătorilor efectuate. ***Precizia rezultatului final al calculelor nu poate fi mai mare decât precizia datelor iniţiale***, adică eroarea relativă a rezultatului trebuie să corespundă erorilor relative ale datelor iniţiale. De aceea :

a) Trebuie evaluată precizia datelor iniţiale (erorilor lor relative). Altfel, fie că nu păstrăm un număr suficient de cifre semnificative şi stricăm precizia rezultatului, fie că păstrăm inutil multe cifre care cresc vertiginos (prin înmulţiri, împărţiri, extrageri de rădăcină etc.), îngreunăm calculele, ceea ce duce la greşeli. *Importă numărul cifrelor semnificative, nu al zecimalelor, adică nu poziţia virgulei !*

b) Trebuie evaluată eroarea relativă a rezultatului pe baza erorilor relative ale datelor iniţiale, chiar înainte de a face calculul rezultatului propriu-zis.

c) Eroarea rezultatului final este determinată în esenţă de eroarea relativă a mărimii celei mai *neprecise*.

d) În rezultatul final trebuie să păstrăm atâtea zecimale câte zecimale are eroarea absolută.

e) Trebuie evaluată eroarea relativă a fiecărui rezultat parţial (intermediar). În toate rezultatele intermediare se păstrează una sau cel mult două cifre semnificative *în plus* faţă de numărul cifre-lor semnificative ale rezultatului final. Această cifră în plus se va elimina prin rotunjire abia în rezultatul final.

Trebuie folosite: tabele de logaritmi, metode grafice şi grafoanalitice, formule de aproximaţie etc. pentru a uşura cât mai mult munca de calcul. Metodele grafice de calcul dau o precizie de circa 0,3 %, iar tabelele de logaritmi cu 4 zecimale dau o precizie de 0,03 %. În laboratoarele obişnuite pentru elevi sau studenţi chiar o precizie de numai 1 % este de cele mai multe ori suficientă.

Trebuie efectuat un control continuu al calculelor pentru a evita greşeli şi omisiuni. Fiecare operaţie trebuie verificată imediat prin operaţia inversă şi abia după aceea se poate trece la operaţia următoare. De asemenea, se recomandă efectuarea calculelor de două ori, cu mijloace diferite, sau de către două persoane în mod independent, comparând apoi rezultatele.

2. În ceea ce priveşte *calculul erorilor* trebuie subliniate următoarele. *Toate erorile se dau şi se calculează cu* ***una*** *sau cel mult două cifre semnificative*. De aceea, valorile tuturor mărimilor care intervin în calculul erorii trebuie *rotunjite*, astfel încât să rămână circa *două* cifre semnificative. Eroarea finală se va rotunji la o *singură* cifră semnificativă.

3. Forma de prezentare a calculelor trebuie să fie îngrijită. Nu trebuie folosite foi volante sau fiţuici umplute de-a lungul şi de-a latul cu calcule şi ştersături. *Calculele trebuie făcute într-un caiet de laborator*, în succesiune logică, pentru a putea fi oricând verificate. *Nu se şterg datele sau cifrele cu gumă*, ci se scriu încă odată sau se taie uşor şi se scriu deasupra sau dedesubt noile cifre. Dacă trebuie refăcute toate calculele, este bine să le facem complet şi ordonat pe o pagină nouă.

4. În încheiere dăm un *exemplu*. Fie măsurarea perioadei T a pendulului simplu gravitaţional :

$$T = 2\pi\sqrt{\ell/g}\ ,\quad \ell = 42{,}3 \pm 0{,}1\ \text{cm}\ ,\quad g = 981 \pm 1\ \text{cm/s}^2 .$$

Eroarea relativă maximă a perioadei este, conform regulii cunoscute, $\varepsilon_T = \varepsilon_\pi + (1/2)\,\varepsilon_\ell + (1/2\ \varepsilon_g$. Să evaluăm eroarea lui ℓ şi g :

$$\varepsilon_\ell = \delta\,\ell\,/\,\ell = 0{,}1\,/\,42{,}3 = 0{,}24\ \%\ ;\qquad \varepsilon_g = 1\,/\,981 = 0{,}10\ \% .$$

Prin urmare eroarea asupra lui π trebuie să fie de acest ordin. Luăm π cu două zecimale : $\varepsilon_\pi = 0{,}01\,/\,3{,}14 = 0{,}32\ \%$. Eroarea asupra rezultatului final :

$$\varepsilon_T = \varepsilon_\pi + (1/2)\,\varepsilon_\ell + (1/2)\,\varepsilon_g = 0{,}32 + 0{,}12 + 0{,}05\ \% \cong 0{,}5\ \%\ ;$$

$$\delta T = T\,\varepsilon_T = 1{,}30\ \cdot 0{,}005 \approx 0{,}007\ \text{s}\ ,$$

deci trebuie să-l luăm pe T cu ***trei*** zecimale (câte are eroarea sa absolută) . Rezultatul final se scrie astfel :

$$T = 1{,}304\ \pm\ 0{,}007\ \text{s} .$$

Pe lângă eroarea calculată mai sus, trebuie considerată şi o eroare de metodă, datorită aproximaţiei $\sin\alpha \approx \alpha$, folosite în deducerea formulei perioadei. Pentru amplitudini unghiulare de oscilaţie sub 8^o această eroare este sub 0,1 % .

* * *

TRASAREA GRAFICELOR

În alcătuirea şi trasarea graficelor trebuie respectate anumite reguli.

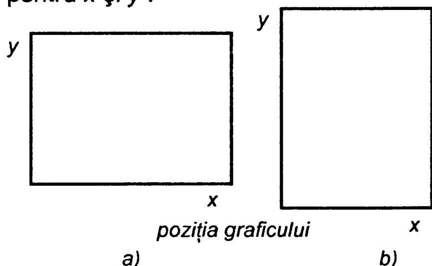
1. ***Tabelul de valori.*** În primul rând alcătuim tabelul cu valorile argumentului *x* (în ordine crescătoare) şi valorile corespunzătoare ale funcţiei $y = f(x)$, ca de exemplu, în tabelul alăturat:

x,un. măs.	51	59	68	79	92	104	118	128	142	156	168
y,un. măs	1,17	1,21	1,26	1,29	1,33	1,37	1,39	1,40	1,42	1,43	1,45

La începutul rândului, lângă simbolul mărimii, trebuie scrisă *neapărat* unitatea de măsură respectivă, fie în paranteze drepte, fie despărţită printr-o virgulă de simbolul mărimii.

2. ***Domeniul de variaţie.*** Stabilim domeniul de variaţie a celor două mărimi *x* şi *y*, prin rotunjirea valorilor extreme până la valori convenabile care să încadreze bine valorile din tabel. În exemplul nostru : $x \in (50\ ,\ 170)$, deci $\Delta x = 120$ şi $y \in (1{,}00\ ;\ 1{,}50)$, deci $\Delta y = 0{,}50$.

3. ***Dimensiunile graficului.*** Dimensiunile graficului trebuie să fie de ordinul 12 cm × 18 cm (dublul unei cărţi poştale sau jumătate dintr-o coală oficială obişnuită, deci format A5). În cazuri speciale graficul poate fi mai mic, de ordinul 9 cm × 12 cm (adică o carte poştală, dar în nici un caz mai mic) sau poate fi mai mare, de ordinul 18 cm × 24 cm. Raportul *optim* dintre lungime şi lăţime este $\sqrt{2} = 1{,}4$. Graficul poate fi aşezat în una din cele două poziţii din fig.1 ("peisaj" , respectiv "portret"), în funcţie de comoditatea scărilor pentru *x* şi *y* .



poziţia graficului

a) *b)*

Fig.1

4. *Scările.* Graficul poate fi trasat comod pe hârtie milimetrică sau eventual pe hârtie în pătrățele de aritmetică (sau "comercială"). Poate fi folosită și o hârtie albă, liniată de noi ușor cu creionul cu linii ***echidistante*** verticale și orizontale. Distanța dintre două linii consecutive, verticale sau orizontale, trebuie să reprezinte un număr de unități egal *neapărat* cu unul din divizorii lui **10**, adică 1 , 2 sau 5 , înmulțit cu o putere întreagă convenabilă a lui 10, deci $1 \cdot 10^k$ sau $2 \cdot 10^k$ sau $5 \cdot 10^k$ unități , unde *k* este un număr *întreg* convenabil (pozitiv, negativ sau nul).

Astfel , intervalul dintre liniile echidistante, verticale sau orizontale, poate fi din 0,1 în 0,1 unități sau din 0,2 în 0,2 unități sau din 0.5 în 0,5 unități , asta pentru $k = -1$. Pentru $k = 0$ intervalul va fi: din 1 în 1 sau din 2 în 2 sau din 5 în 5 unități. Pentru $k = 1$ intervalul va fi: din 10 în 10 sau din 20 în 20 sau din 50 în 50 unități. Pentru $k = 2$ intervalul va fi : din 100 în 100 sau din 200 în 200 sau din 500 în 500 unități.

Nu se recomandă folosirea intervalelor sub 0,1 sau peste 500 unități, deoarece le putem evita folosind submultiplii sau multiplii ai unităților folosite.

Distanța dintre două linii consecutive trebuie să fie de ordinul a 10 ... 20 mm. Liniile nu trebuie să fie nici prea dese, deoarece încarcă desenul și nici prea rare, deoarece strică precizia de reprezentare a datelor.

În cazul hârtiei milimetrice sau în pătrățele (de aritmetică sau "comercială") nu se trasează liniile echidistante (deoarece sunt gata trasate de fabrică), ci se marchează pe cele două axe doar intervalele echidistante alese. Distanța dintre aceste marcaje trebuie să cuprindă 1, 2 sau 5 cm, respectiv 2 , 4 sau 10 pătrățele de aritmetică.

În cazul exemplului nostru $\Delta x = 120$ sau mai bine 140 unități. Dacă folosim hârtie milimetrică (sau în pătrățele) vom alege $\Delta x =$ $=140$ repartizat pe 14 cm lungime (în cazul hârtiei albe liniate de noi putem alege și $\Delta x = 130$ repartizat pe cca 14...16 cm). Pe axa verticală avem $\Delta y = 0{,}50$ unități pe cate îi repartizăm pe 10 cm înălțime (fig.1 a) sau pe 15 cm înălțime (fig.1 b).

5. *Trasarea graficului.* Fiecare punct experimental se marchează vizibil printr-un cerculeț, pătrățel, triunghi, cruciuliță etc. de 1 mm mărime, ***fără*** a duce linii *ajutătoare* (pline sau punctate), ci urmărind paralel liniile de coordonate deja trasate, și *fără* a nota pe axe valorile numerice ale coordonatelor punctului. Numai punctele

remarcabile (***critice***) pot fi evidențiate prin linii de coordonate (întrerupte) proprii şi pot fi înscrise pe axe valorile coordonatelor respective.

Punctele experimentale reprezentate *nu trebuie* unite prin linii drepte, astfel încât graficul să iasă o linie *frântă*. Trebuie trasată o curbă ***lină*** (eventual cu ajutorul unui florar) prin ***interpolare***, astfel încât *curba să treacă prin cât mai multe puncte experimentale, lăsând eventual de o parte şi de alta, în mod cât mai egal şi simetric, un număr cât mai mic de puncte şi cât mai apropiate de curbă.*

Forma curbei pe care o vom trasa depinde de cunoştinţele noastre asupra desfăşurării fenomenului (procesului) studiat. Astfel, dacă avem argumente temeinice în sprijinul unei dependenţe *liniare*, vom trasa prin interpolare o linie *dreaptă* (fig.2 ,linia plină). Dacă ştim că dependenţa este parabolică, vom interpola cât mai bine o curbă parabolică (fig.2, linia întreruptă). Dar se recomandă să se prelucreze expresia convenabil şi să se aleagă variabilele convenabil, astfel încât relaţia de reprezentat să devină ***liniară*** (*liniarizarea* expresiei de reprezentat), deci foarte uşor de interpolat şi de extrapolat (cu erori mici).

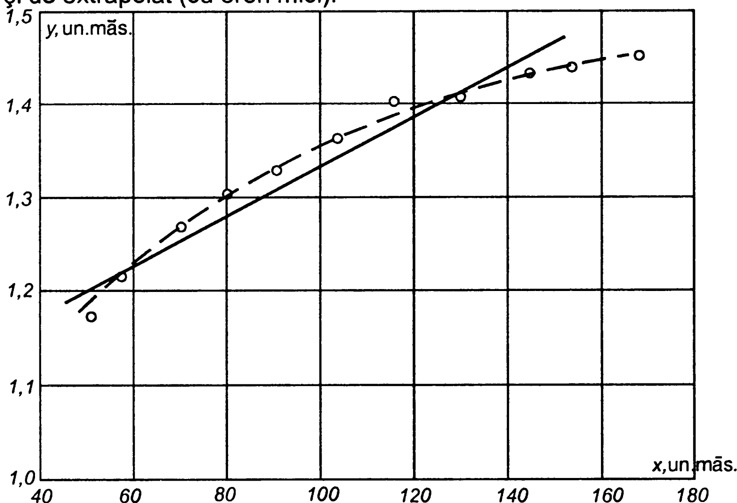


Fig.2

Dacă studiem un fenomen nou şi nu ştim deloc la ce tip de curbă ne putem aştepta, atunci trebuie să evaluăm bine erorile funcţiei *y* pentru fiecare punct experimental, pentru a vedea câtă

încredere putem avea în punctele experimentale obținute. Pentru aceasta marcăm intervalele ($y - \delta y$, $y + \delta y$) (δy = eroarea absolută) prin segmente verticale centrate pe punctele experimentale respective (x, y) şi facem interpolarea printr-o curbă *lină* care să taie aceste segmente. De exemplu, în cazul graficului din fig.3 se evidențiază experimental existența unui anumit proces (de cristalizare) în regiunea palierului AB. Uneori se reiau măsurătorile în mod special în regiunea interesantă pentru a obține mai multe (mai dese) puncte experimentale şi a evita o eventuală pierdere (estompare) a unor variații (fig.3, cruciulițele).

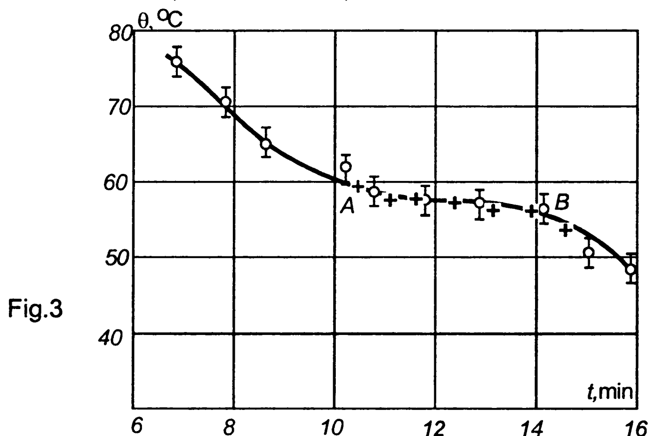


Fig.3

Sub cadrul graficului sau sus în cuprinsul cadrului se scrie titlul graficului.

6. ***Exemple***. a) *Resort elastic*. Forța elastică (egală cu greutatea atârnată) în funcție de alungirea resortului ne conduce la graficul liniar ($F = k\,x$) din fig.4.

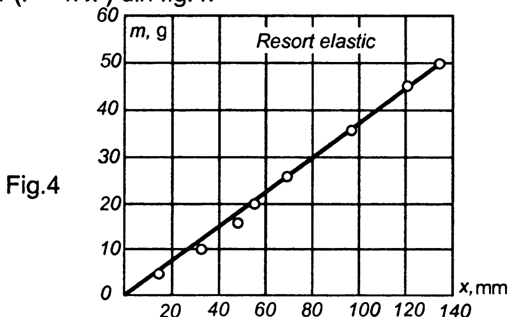


Fig.4

m, g	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
x, mm	15	30,5	45	55	68,5	82	97,5	106	120	135

Constanta elastică se determină din grafic alegând ***pe dreapta de interpolare*** două puncte cât mai depărtate între ele spre marginile graficului, de exemplu : (0, 0) şi (135, 50). Atunci

$k = F / x = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8\ \text{N} : (135 \cdot 10^{-3}\ \text{m}) = 3{,}63\ \text{N/m}$.

b) *Rezonanța mecanică.* Amplitudinea oscilațiilor forțate în funcție de frecvență ne conduce la curba din fig.5.

ω, rad/s	96,0	81,6	75,9	68,3	66,2	56,6	48,1	44,5	39,8	30,8	28,3	26,2	20,9
B, mm	1,5	2,5	4,0	4,5	6,0	6,5	7,0	7,5	10	12	21	14	10

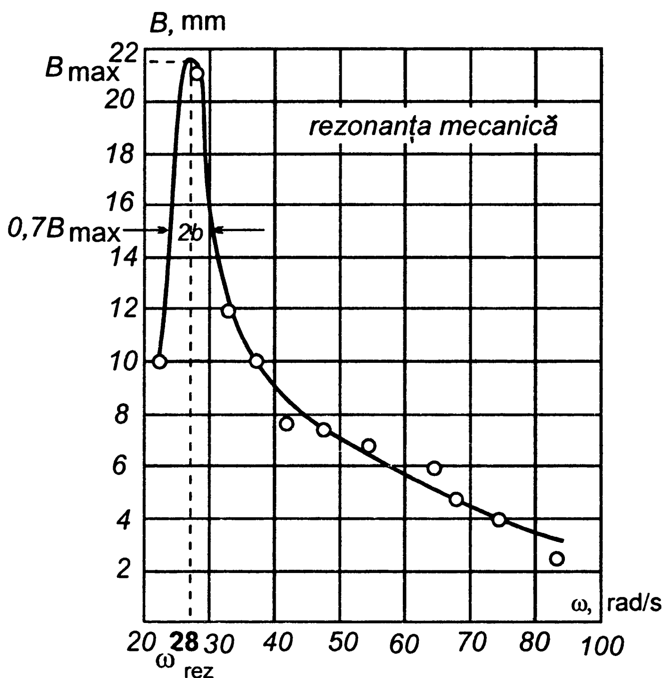


Fig.5

Se vede că tocmai în regiunea *rezonanței* avem prea puține puncte experimentale, de aceea ar trebui reluate determinările experimentale în această regiune pentru a preciza cât mai bine forma curbei.

Din grafic rezultă frecvența de rezonanță $\omega_{rez} \approx 28$ rad/s .

Amplitudinea oscilațiilor forțate este

$$B = \frac{F_o}{\sqrt{r^2\omega^2 + \left(m\omega^2 - k\right)^2}} = \frac{F_o}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_o^2\right)^2 + 4b^2\omega^2}} .$$

În cazul amortizărilor mici, când *factorul de amortizare* $b \ll \omega_o$, avem $\omega_{rez} \approx \omega_o = \sqrt{k/m}$. Atunci în vecinătatea rezonanței, anume pentru $|\omega - \omega_o| \ll \omega_o$, avem aproximativ $\omega + \omega_o \approx 2\omega_o$, $\omega \approx \omega_o$ şi deci

$$B \cong \frac{F_o}{m\sqrt{4\omega_o^2\left(\omega - \omega_o\right)^2 + 4b^2\omega_o^2}} = \frac{F_o}{2k\sqrt{\left(\omega - \omega_o\right)^2 + b^2}} .$$

Amplitudinea începe să scadă sensibil când $|\omega - \omega_o| \cong b$. Anume, atunci când $|\omega - \omega_o| = b$, adică pentru frecvențele $\omega_1 = \omega_o - b$ şi $\omega_2 = \omega_o + b$, amplitudinea B devine $B_{max}/\sqrt{2} = 0,7\ B_{max}$.

Invers, citim pe curbă amplitudinea maximă B_{max}, calculăm 0,7 B_{max}, trasăm o linie orizontală în dreptul acestei valori a ordonatei, care taie curba în două puncte. Citim abscisele $\omega_{1,2}$ ale acestor puncte. Diferența $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ trebuie să fie chiar $2b$:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2b , \quad b = (1/2)\,\Delta\omega = (1/2)\,(\omega_2 - \omega_1) .$$

Observăm că peste tot aici ω este *frecvența **unghiulară*** : $\omega = 2\pi\nu$. De asemenea, expresia de mai sus a *factorului de amortizare* este valabilă numai pentru rezonanțe "*ascuțite*" când $b \ll \omega_o$.

În general, pentru o curbă de tipul curbei de *rezonanță*, care reprezintă intensitatea unei mărimi în funcție de frecvență unghiulară, se introduce noțiunea de ***lărgime a curbei***, egală cu lărgimea $\Delta x = x_2 - x_1$ a curbei în dreptul ordonatei 0,7 y_{max}. Dacă se reprezintă o mărime *energetică*, care este deci *pătratică* în amplitudine, atunci lărgimea curbei se ia evident în dreptul ordonatei 0,5 y_{max} .

În exemplul nostru : B_{max} = 21,8 mm , 0,7 B_{max} = 15,3 mm , $\omega_1 \cong 27$ rad/s , $\omega_2 \cong 29$ rad/s , deci lărgimea curbei de rezonanță $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2$ rad/s şi deci ***factorul de amortizare*** *b este egal cu semilărgimea curbei de rezonanță* : $b = (1/2)\,\Delta\omega = 1{,}0\ s^{-1}$.

c) *Termometrul cu rezistență*. Rezistența în funcție de temperatură ne conduce la graficul din fig.6.

R, Ω	108	109	120	122	132	136	142	146	154	158
t, °C	22	25	50	58	83	90	104	118	139	150

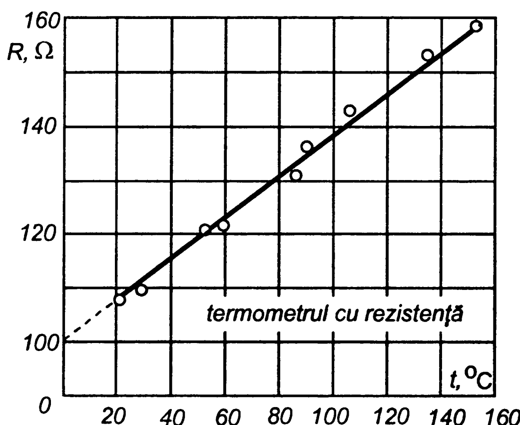


Fig.6

Interpolând o dreaptă, $R = R_0(1 + At)$, şi *extrapolând*-o spre 0°C găsim $R_0 = 100\ \Omega$. Pentru determinarea *pantei* m luăm de exemplu, punctele (0, 100) şi (150, 158) :

$$m = R_0A = (158 - 100) : 150 = 0{,}387\ \Omega/\text{grd}\ ,$$

de unde coeficientul termic al rezistivității :

$$A = m / R_0 = 0{,}387 / 100 = 3{,}87 \cdot 10^{-3}\ \text{grd}^{-1}\ .$$

d) *Termistorul*. Termistorul este un *semiconductor* a cărui rezistență *scade* cu temperatura după o lege de tip exponențial :

$R = A\,e^{\varepsilon/(kT)}$, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K - constanta Boltzmann , unde ε este lărgimea benzii interzise în cazul conductibilității intrinseci (fără impurități sau la temperaturi suficient de înalte). Logaritmând relația precedentă şi exprimând pe ε în electron-volți (1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J) , avem

$\lg R = \lg A + [\varepsilon / (2kT)] \lg e = \lg A + 0{,}4343 \cdot \varepsilon \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$:

: $(2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\, T) = \lg A + 2{,}5\, \varepsilon \cdot 1000 / T$, ($\varepsilon$ în eV).

Prin urmare graficul lui lg *R* în funcție de 1000 / *T* trebuie să fie o linie *dreaptă* cu panta $m = 2{,}5\, \varepsilon$, din care putem afla pe ε, anume $\varepsilon = 0{,}4\, m$. (Acesta este un exemplu de “liniarizare” de care am vorbit mai înainte.)

În fig.7 am reprezentat $R = f(t)$ şi $\lg R = f(1000 / T)$, conform datelor experimentale din tabelul alăturat :

R, Ω	71,4	66,5	25,0	20,4	10,8	7,2	5,6	4,3	3,0	2,2
lg *R*	1,854	1,823	1,398	1,310	1,034	0,858	0,748	0,634	0,477	0,342
t, °C	22	25	50	59	83	92	104	118	139	148
1000/*T*	3,38	3,35	3,09	3,01	2,81	2,74	2,65	2,55	2,42	2,37

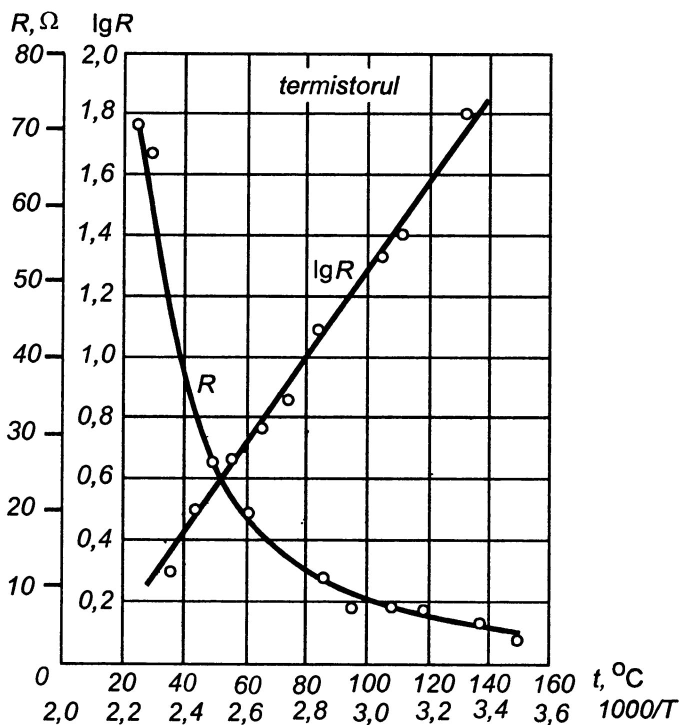


Fig.7

Din graficul lg $R = f(1000 / T)$, luând de exemplu pe ***dreapta de interpolare*** punctele (2,35 ; 0,35) şi (3,35 ; 1,80) , găsim *panta*

$m = (1,80 - 0,35) : (3,35 - 2,35) = 1,45 = 2,5\ \varepsilon$,

de unde intervalul ***energetic*** $\varepsilon = 0,4\ m = 0,58$ eV .

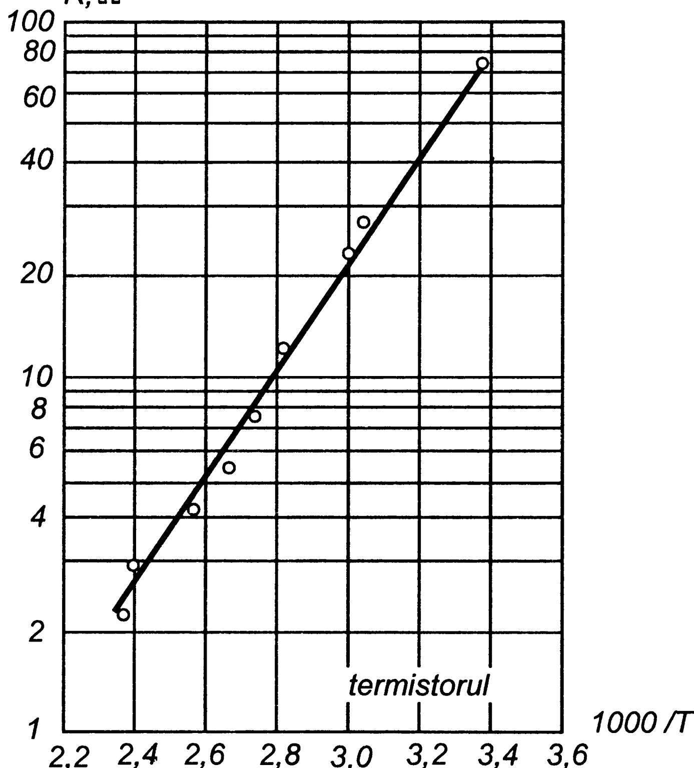


Fig.8

Există hârtie milimetrică liniată în scară *logaritmică*, simplă (o axă) sau dublă (ambele axe). Putem linia noi înşine o astfel de scară, copiind scările logaritmice de pe o *riglă de calcul*. De exemplu, rezistența termistorului de mai sus în funcție de 1000 / T este reprezentată direct în scara semilogaritmică din fig.8, fără a mai fi nevoie să calculăm logaritmii.

ANEXE

1. Formule de aproximație

$$(1 + x)(1 + y)(1 + z)... \approx 1 + x + y + z + ... \quad (1)$$

dacă $|x| \ll 1$, $|y| \ll 1$, $|z| \ll 1$,...,
formula se obține desfăcând parantezele şi neglijând termenii de grad *superior*, care sunt ***mici*** față de cei *liniari* (de gradul 1).

$$\frac{1}{1 \pm x} = \frac{1 \mp x}{1 - x^2} \approx 1 \mp x \quad , \text{ dacă } |x| \ll 1 ; \quad (2)$$

$$\frac{1}{a \pm b} = \frac{1}{a(1 \pm b/a)} \approx \frac{1}{a}\left(1 \mp \frac{b}{a}\right) \text{ , dacă } |b| \ll |a|\text{, adică } |b/a| \ll 1 ; \quad (3)$$

$$\sqrt{1 \pm x} \approx \sqrt{1 \pm x + x^2/4} = \sqrt{(1 \pm x/2)^2} = 1 \pm x/2 \text{ , dacă } |x| \ll 1 ; \quad (4)$$

$$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{a(1 \pm b/a)} \approx \sqrt{a}\left(1 \pm \frac{b}{2a}\right) = \sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}} \text{ , dacă } |b| \ll a > 0. \quad (5)$$

$$\frac{(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)\cdots}{(1 + y_1)(1 + y_2)(1 + y_3)\cdots} \approx 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots - y_1 - y_2 - y_3 - \cdots, \quad (6)$$

dacă $|x_i| \ll 1$, $|y_i| \ll 1$, $i = 1, 2, 3, ...$

Mai general :

$$(1 + x)^r \approx 1 + rx + (1/2)r(r - 1)x^2 \approx 1 + rx \text{ , dacă } |x| \ll 1 , \quad (7)$$

unde $r \in \mathbf{R}$ este de ordinul unităților . De exemplu,

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = (1 \pm x)^{-1/2} \approx 1 \mp x/2 \text{ , dacă } |x| \ll 1 \text{ , (aici } r = -1/2) . \quad (8)$$

Pentru alte funcții :

$$\sin x \approx x - x^3/6 \approx x ; \ \cos x \approx 1 - x^2/2 \approx 1 ; \ \mathrm{tg}\, x \approx x + x^3/3 \approx x, \quad (9)$$

unde x este în ***radiani*** şi $|x| \ll 1$ rad , adică $x < 6^o$,

$$1 \text{ rad} = 360^o/(2\pi) = 180^o/\pi = 57^o\ 17'\ 44'',8 \approx 57^o . \quad (10)$$

$$e^x \approx 1 + x + x^2/2 \approx 1 + x , \text{ dacă } |x| \ll 1 , \quad (11)$$

$$a^x = e^{x \ln a} \approx 1 + x \ln a , \text{ dacă } |x \ln a| \ll 1 , \quad (12)$$

$$\ln(1 + x) \approx x - x^2/2 \approx x , \text{ dacă } |x| \ll 1 . \quad (13)$$

2. Câteva unități de măsură şi constante fizice

Litrul cu simbolul L este definit astăzi ca fiind identic cu 1 dm^3.

Torrul sau mm Hg este presiunea exercitată de o coloană de mercur înaltă de 1 mm la *temperatura* de 0°C şi în câmpul gravitațional *normal* $g_n = 9{,}80665 \text{ m/s}^2$:

$$1 \text{ torr} = 1 \text{ mm Hg} = [\rho g h] =$$
$$= 13595{,}1 \text{ (kg/m}^3) \cdot 9{,}80665 \text{ (m/s}^2) \cdot 10^{-3} \text{ m} =$$
$$= 133{,}322 \text{ Pa} \cong 133{,}3 \text{ Pa} \cong (400/3) \text{ Pa} . \quad (1)$$

Densitatea mercurului :

la 0°C : 13595,1 kg/m^3 şi la 20°C : 13545,9 kg/m^3 . (2)

Atmosfera fizică :

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ torr} = 101325 \text{ Pa} \cong 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 101{,}3 \text{ kPa}. \quad (3)$$

Milimetrul coloană de apă :

$$1 \text{ mm } H_2O \cong 9{,}8 \text{ Pa} \cong 13{,}6 \text{ torr} , \quad 1 \text{ atm} = 10{,}33 \text{ m } H_2O . \quad (4)$$

Caloria internațională :

$$1 \text{ cal}_{IT} = (1/860) \text{ Wh} = 4{,}1868 \text{ J} ; \quad 1 \text{ J} \cong 0{,}24 \text{ cal} . \quad (5)$$

Kelvinul, unitate de temperatură *termodinamică*, este fracțiunea 1 / 273,16 din temperatura termodinamică a punctului *triplu* al apei. Relația dintre *scările* **Kelvin** şi **Celsius** :

$$T\,[\text{K}] = 273{,}15 + t\,[^oC] = T_o + t = 1/\alpha + t , \quad (6)$$

unde $\alpha = 1/273{,}15 \text{ K}^{-1} = 0{,}003661 \text{ K}^{-1}$ (7)

este *coeficientul de dilatare izobară* a gazului perfect (sau coeficientul termic al presiunii gazului perfect).

Unitatea atomică de masă:

$$1 \text{ u} = (1/12) \text{ masa atomului } {}^{12}C_6 = 1{,}6605402 \cdot 10^{-27} \text{ kg} =$$
$$= 931{,}4943 \text{ MeV} = 1{,}4924191 \cdot 10^{-10} \text{ J} , \quad (8)$$

$$1 \text{ u} \cong 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cong 931{,}5 \text{ MeV} \cong 1{,}49 \cdot 10^{-10} \text{ J} . \quad (9)$$

$$1 \text{ u} = 10^{-3}/N_A , \text{ unde } N_A = 6{,}0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (10)$$

este *constanta (numărul) lui Avogadro.*

Molul este *cantitatea de substanță* (materie) a unui sistem care conține atâtea entități elementare câți atomi există în 12 g de carbon 12 . Entitățile elementare pot fi atomi, molecule, ioni, electroni, alte particule sau grupuri specificate de asemenea particule.

A nu se confunda molul cu *kilogramul* : cu kilogramul măsurăm ***masa***, iar cu *molul* măsurăm ***cantitatea de substanță*** . În SI *molul* şi ***nu kilo***molul este unitate pentru cantitatea de substanță.

*Masa **molară*** μ [kg/mol] şi masa *moleculară* M [u] sunt legate prin relația

$$\mu\,[\mathrm{kg/mol}] = 10^{-3}\,M\,[\mathrm{u}]\,. \qquad (11)$$

Constanta lui ***Boltzmann*** *:*

$$k = 1{,}380658 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K} \cong 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K}\,. \qquad (12)$$

Constanta lui ***Avogadro*** *:*

$$N_A = 10^{-3} / u_{[kg]} = 6{,}0221367 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}} \cong 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}. \qquad (13)$$

Constanta universală a gazelor :

$$R = kN_A = 8{,}314510\ \ \mathrm{J/(mol \cdot K)} \cong\ 8{,}3\ \mathrm{J/(mol \cdot K)}\,. \qquad (14)$$

Condiții ***normale*** ale gazelor înseamnă :

temperatură *normală* : $T_0 = 273{,}15\ \mathrm{K} = 0{,}00^{\circ}\mathrm{C}$;

presiune *normală* : $p_0 = 101325\ \mathrm{Pa} = 760\ \mathrm{torr} = 1{,}000\ \mathrm{atm}$.

Volumul molar al gazului perfect în condiții *normale* :

$$V_{\mu 0} = RT_0 / p_0 = 22{,}4141 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3/mol}\ \cong 22{,}4\ \mathrm{L/mol}. \qquad (15)$$

Numărul lui ***Loschmidt*** (concentrația moleculelor unui gaz perfect în condiții *normale*) :

$$L = p_0 / (kT_0) = N_A V_{\mu 0} = 2{,}68676 \cdot 10^{25}\ \mathrm{m^{-3}} \cong 2{,}69 \cdot 10^{25}\ \mathrm{m^{-3}}\,. \qquad (16)$$

3. Punctele fixe fundamentale ale scării internaționale a temperaturilor (în $^{\circ}$C)

a) Punctul de fierbere a oxigenului	-182,970
b) Punctul de topire a gheții (la presiunea normală)	0,000
c) Punctul de fierbere a apei (la presiunea normală)	100,000
d) Punctul de fierbere a sulfului	444,600
e) Punctul de solidificare a argintului	960,8
f) Punctul de solidificare a aurului	1063,0

*Punctul **triplu** al apei* este *prin convenție* $273{,}16\ \mathrm{K} = 0{,}01^{\circ}\mathrm{C}$.

4. Coeficientul de dilatare izobară α_p şi coeficientul termic izocor al presiunii α_V la gaze

a) *Gazele folosite în termometrie*

(presiunea inițială 1 ktorr, intervalul de temperatură 0...100°C)

Gazul	He	H_2	N_2	aer	Ne
α_p, 10^{-3} K^{-1}	3,6580	3,6588	3,6735	3,6728	3,6600
α_V, 10^{-3} K^{-1}	3,6605	3,6620	3,6744	3,6744	3,6617

b) *Alte gaze*

(p_0 - presiunea inițială, 0...*t*, °C - intervalul de temperatură)

Gazul	p_0, kPa	0...*t*, °C	α_p, 10^{-3} K^{-1}	α_V, 10^{-3} K^{-1}
Aer	30,66	0...1067	-	3,6643
~	2670	0...100	-	3,887
O_2	24...30,7	0...1067	-	3,6652
~	88	0...100	-	3,6738
~	100 atm	0...100	4,86	-
CO	30,66	0...1067	-	3,6648
~	101,32	0...100	3,669	3,667
CO_2	32	0...1067	3,6756	-
~	69,3	0...100	3,7073	3,6981
~	133,3	0...100	3,7410	3,7262
N_2O	101,32	0...100	3,719	3,676
SO_2	101,32	0...100	3,903	3,845
NH_3	101,32	0...50	3,854	-
Ar	86,66	0...100	-	3,6680
N_2	200 atm	0...100	4,34	-
~	1000 atm	0...100	2,18	-

5. Căldurile specifice ale gazelor în J/(kg · K)

a) *La presiune constantă* (1 atm) c_p [J/(kg · K)]

Gazul	t, °C	c_p	*Gazul*	t, °C	c_p
Acetilena C_2H_2	-	1680	Dioxid de carbon CO_2	-	845
Aer uscat	20	1006	Dioxid de sulf SO_2	-	629
~	100	1011	Eter etilic $(C_2H_5)_2O$	25...111	1791
~	500	1092	Heliu He	-	5100
~	1000	1192	Hidrogen H_2	-	14230
~	- 100	1008	Hidrogen sulfurat H_2S	-	1085
~ (100 atm)	- 80	1902	Metan CH_4	-	2210
Alcool metilic CH_4O	101...223	1917	Oxid de azot NO	13...171	971
Amoniac NH_3	-	2170	Oxid de carbon CO	-	1043
Argon Ar	15	523	Oxigen O_2	-	910
Azot N_2	-	1040	Protoxid de azot N_2O	26...103	892
Clor Cl_2	-	507	Sulfura de carbon CS_2	86...190	670
Cloroform $CHCl_3$	27...118	603	Terebentină $C_{10}H_{16}$	179...249	2118
Dioxid de azot NO_2	27...67	680			

b) *La volum constant* c_v [J/(kg · K)]

Gazul	t, °C	c_v	*Gazul*	t, °C	c_v
Aer	0	718	Hidrogen H_2	≈ 50	10050
Argon Ar	0...2000	312,2	Oxid de carbon CO	1000	950
Azot N_2	0	732	~	1800	1002
Dioxid de carbon CO_2	255	691	Vapori de apă H_2O	100	1463

Observație. Pentru *aer*: $c_v = 718 + 0{,}1167\,\rho$, unde ρ este densitatea în kg/m³. Pentru *azot*: $c_v = 732 + 0{,}67\,t$, unde t este temperatura în °C. Pentru *dioxidul de carbon*: $c_v = 691 + 0{,}889\,\rho + 0{,}00142\,\rho^2$, ρ - densitatea. La *hidrogen*: c_v scade cu creşterea densității şi scăderea temperaturii.

6. Exponentul adiabatic $\gamma = C_p / C_v = c_p / c_v$ pentru gaze şi vapori

a) *Gaze monoatomice*

Gazul	t, °C	γ	*Gazul*	t, °C	γ
Argon Ar	0	1,667	Mercur Hg (vapori)	310	1,666
Heliu He	0	1,63	Neon Ne	19	1,642
Kripton Kr	19	1,689	Xenon Xe	19	1,666

b) *Gaze diatomice*

Gazul	t, °C	γ	*Gazul*	t, °C	γ
Aer (uscat)	- 79,3	1,405	Azot N_2	20	1,401
~	0...17	1,401	Clor Cl_2	-	1,36
~	500	1,357	Hidrogen H_2	4...17	1,407
~	900	1,32	Oxid de azot NO	-	1,394
~ (200 atm)	0	1,828	Oxid de carbon CO	1800	1,297
~ ~	- 79,3	2,333	Oxigen O_2	5...14	1,400

c) *Gaze triatomice*

Gazul	t, °C	γ	*Gazul*	t, °C	γ
Apă H_2O (vapori)	100	1,334	Dioxid de sulf SO_2	16...34	1,26
Dioxid de azot NO_2	150	1,31	~	500	1,2
Dioxid de carbon CO_2	4...11	1,300	Hidrogen sulfurat H_2S	-	1,340
~	300	1,22	Protoxid de azot N_2O	-	1,324
~	500	1,20	Sulfura de carbon CS_2	-	1,239

d) *Gaze poliatomice*

Gazul	t, °C	γ	*Gazul*	t, °C	γ
Acetilena C_2H_2	-	1,26	Clorură de etil C_2H_5Cl	22,7	1,187
Acid acetic $C_2H_4O_2$	136,5	1,147	~ de metil CH_3Cl	19...30	1,279
Alcool etilic C_2H_6O	53	1,133	Etan C_2H_6	-	1,22
~	99,8	1,134	Eter etilic $C_4H_{10}O$	12...20	1,024
Alcool metilic CH_4O	99,7	1,256	~	99,7	1,112
Amoniac NH_3	-	1,336	Etilena C_2H_4	-	1,264
Benzen C_6H_6	20	1,40	Iodură de metil CH_3J	-	1,286
~	99,7	1,105	Metan CH_4	-	1,313
Bromură de etil C_2H_5Br	-	1,188	Peroxid de azot N_2O_4	20	1,172
~ de metil CH_3Br	-	1,274	Propan	-	1,130
Cloroform $CHCl_3$	24...42	1,110	Tetraclorură de carbon CCl_4	-	1,130
~	99,8	1,150			

7. Tensiunea superficială σ a apei la frontiera cu aerul

t, °C	0	5	10	15	20	25
σ, mN/m	75,7	74,92	74,22	73,49	72,75	71,97

30	40	50	60	70	80	100
71,18	69,6	67,9	66,2	64,4	62,6	58,8

8. Tensiunea superficială σ în mN/m a unor lichide, la 20°C. Valorile ***subliniate*** sunt foarte precise

a) *La frontiera cu aerul :*

Alcool etilic	22,3	Fenol	40,9
~ metilic	22,6	Glicerină	63,4
Anilină	43	HNO_3 conc.	41
Apă	73	H_2SO_4 conc.	55
Apă cu săpun	43	Kerosin	26
Benzen	***28,88***	Mercur (scade în timp)	500...400
Benzină	28,9	Soluție apă cu săpun	43
Cloroform	***27,14***	Terebentină	27

b) *La frontiera cu vaporii proprii :*

Acetonă	23,7	Mercur	472
Alcool etilic	22,8	Sulfură de carbon	32,3
Anilină	42,9	Tetraclorură de carbon	27,0
Bromoform	41,5	Toluen	28,4
Eter etilic	***16,96***		

9. Tensiunea superficială σ în mN/m la interfața a două lichide, la 20 °C

Apa cu :		*Mercur cu :*	
Benzen	35	Acetonă	390
Cloroform	28	Benzen	357
Eter etilic	10	Cloroform	357
Tetraclorură de carbon	45		

10. Coeficienții de dilatare ai unor substanțe

Solide . Coeficientul de dilatare ***liniară*** (la temperatura camerei sau pe intervalul specificat) în $10^{-6}\ K^{-1}$

Alama		18...23	Fontă		10...11,4
Aluminiu		23	Gheață		51
~	0...600°C	29	Lemn	‖ fibre	3...5
Argint		19	~	⊥ fibre	35...60
~	0...900°C	20,5	Litiu		60
Aur		14	Magneziu		25
~	0...500°C	15	~	0...400°C	30
Ciment		14	Mngan		21
Cobalt		12	Molibden		5
~	25...350°C	18	Nichel		12,8
Constantan		15...17	~	0...1000°C	18
Cositor		21	Nicrom		12...13
~	‖ axă	30,5	Oțel		11
~	⊥ axă	15,5	~	inoxidabil	10...11
Crom		7	Platină		9,9
~	0...900°C	11	~	800°C	11
Cuarț	‖ axă	7,5	Plumb		29
~	⊥ axă	13,7	~	0...320°C	33
~	topit	0,45	Sticlă		8...10
Cupru		16...17	Zinc	‖ axă	60
Duraluminiu		23...27	~	⊥ axă	13
Fier		12	~	laminat ‖	31
~	0...700°C	15	~	laminat ⊥	20
			~	turnat	30

Lichide. (la temperatura camerei ≈ 20°C) în $10^{-5}\ K^{-1}$

Acetonă	143	Apă	0...4 °C	- 3,3
Acid acetic	107	~	4...10	4,8
Acid clorhidric	57	~	5...10	5,3
Acid sulfuric 100%	56...57	~	10...20	15,0
Alcool etilic	108...110	~	20...30	25
~ metilic	119...122	~	30...40	35
Anilină	85	~	20...40	30,2
		~	40...60	45,8
Apă	21	~	60...80	58,7
		~	80...100	70,2

Continuare →

Benzen	122	Petrol lampant	90
Benzină	124	Sulfură de carbon	119...121
Cloroform	127	Terebentină	96
Eter etilic	163	Tetraclorură de carbon	122
Fenol	79	Toluen	107
Glicerină	47...53	Ulei de măsline	72
Mercur	18,2	~ de transformator	60
Petrol	100		

11. Presiunea vaporilor saturanţi ai unor substanţe în kPa la 20°C

Substanţa	p_s , kPa	*Substanţa*	p_s , kPa
Acetona	24,66	Dioxid de carbon	56,8 atm
Acid acetic	1,55	~ de sulf	3,2 atm
Alcool etilic	5,93	Eter etilic	58,66
~ metilic	11,83	Hidrogen sulfurat	17,7 atm
Amoniac	8,46 atm	Iod	26,7 Pa
Benzina	9,95	Mercur	0,16 Pa
Brom	23,06	Sulfura de carbon	39,73
Cloroform	21,46	Tetraclorura de carbon	12,13

12. Presiunea şi densitatea vaporilor saturanţi ai gheţii

t , °C	p_s , Pa	ρ_s , g/m^3	t , °C	p_s , Pa	ρ_s , g/m^3
-75	0,080	-	-6	368	2,99
-60	0,93	-	-5	401	3,24
-30	37,3	0,47	-4	437	3,51
-20	102,6	0,96	-3	476	3,81
-10	260	2,14	-2	517	4,13
-9	284	2,33	-1	563	4,47
-8	309	2,54	0	611	4,84
-7	337	2,76			

13. Presiunea şi densitatea vaporilor saturanţi ai apei

t, °C	p_s, Pa	ρ_s, g/m^3	t, °C	p_s, Pa	ρ_s, g/m^3
1	656,5	5,2	21	2483,2	18,3
2	705,3	5,6	22	2640,2	19,4
3	757,1	6,0	23	2805,5	20,5
4	812,5	6,4	24	2979,9	21,8
5	871,4	6,8	25	3163,6	23,0
6	934,0	7,3	26	3357,2	24,5
7	1000,6	7,8	27	3560,9	25,8
8	1071,4	8,2	28	3775,4	27,2
9	1146,4	8,8	29	4001,2	28,7
10	1226,3	9,4	30	4238,6	30,4
11	1310,7	10,0	31	4488,0	
12	1400,4	10,7	32	4750,3	
13	1495,5	11,4	33	5025,6	
14	1596,1	12,0	34	5314,7	
15	1702,6	12,8	35	5618,1	
16	1815,4	13,7	40	7371,4	51,1
17	1934,6	14,5	50	12331	83,0
18	2060,7	15,4	100	101325	600
19	2193,9	16,3	200	15,3 atm	7,9 kg/m^3
20	2334,7	17,3	374	219 atm	286 kg/m^3

14. Presiunea vaporilor saturanţi ai apei

t, °C	p_s, kPa	t, °C	p_s, kPa	t, °C	p_s, kPa
35	5,6181	60	19,92	90	70,11
36	5,9364	62	21,84	92	75,61
37	6,2703	64	23,90	94	81,46
38	6,6202	66	26,14	96	87,69
39	6,9870	68	28,56	98	94,30
40	7,3714	70	31,16	100	101,32
42	8,1940	72	33,96	102	108,78
44	9,0966	74	36,96	104	116,67
46	10,082	76	40,18	106	125,04
48	11,158	78	43,65	108	133,90
50	12,331	80	47,36	110	143,27
52	13,612	82	51,33	112	153,16
54	14,999	84	55,57	114	163,61
56	16,505	86	60,10	116	174,64
58	18,145	88	64,95	118	186,28

continuare →

continuare :

120	198,5	140	361,3	160	618,1
122	211,4	142	382,2	162	650,1
124	225,1	144	404,2	164	683,5
126	239,3	146	427,0	166	718,3
128	254,4	148	451,0	168	754,5
130	270,1	150	476,0	170	792,1
132	286,6	152	502,1	172	831,1
134	304,1	154	529,3	174	871,7
136	322,2	156	557,7	176	913,7
138	341,3	158	587,3	178	957,4

continuare :

t, °C	p_s, atm	t, °C	p_s, atm	t, °C	p_s, atm
180	9,896	200	15,347	220	22,898
182	10,360	202	16,000	240	33,042
184	10,839	204	16,674	260	46,326
186	11,338	206	17,370	280	63,352
188	11,854	208	18,089	300	84,793
190	12,388	210	18,830	320	111,42
192	12,941	212	19,595	340	144,17
194	13,514	214	20,384	360	184,29
196	14,104	216	21,197	374,1	218,5
198	14,714	218	22,036	*punctul critic*	

15. Căldura specifică a apei în J/(kg · K)

t, °C	0	2	4	6	8
0	4217,4	4210,4	4204,5	4199,6	4195,4
10	4191,9	4189,0	4186,6	4184,6	4182,9
20	4181,6	4180,5	4179,7	4179,0	4178,5
30	4178,2	4178,0	4177,9	4178,0	4178,1
40	4178,3	4178,6	4178,9	4179,4	4179,9
50	4180,4	4181,1	4181,7	4182,5	4183,3
60	4184,1	4185,0	4186,0	4187,1	4188,2
70	4189,3	4190,5	4191,8	4193,2	4194,6
80	4196,1	4197,7	4199,4	4201,1	4202,9
90	4204,8	4206,8	4208,9	4211,1	4213,3

16. Căldurile specifice ale unor substanţe în J/(kg · K)

(ultima cifră nu este exactă)

Substanţa	*t*, °C	*c*	*Substanţa*	*t*, °C	*c*
		***Solide*:**			
Alamă galbenă	0	368	Gheaţă	0	2100
~ roşie	0	377	Lemn	-	1680...2700
Aluminiu	-	895	Naftalină	-	1300
Argint	-	235	Nichel	-	460
Beton	-	880	Oţel	-	448...470
Cărămidă	-	750	Parafină	0...20	2900
Ciment	-	800	Platină	-	120
Cositor	-	230	Plumb	-	125
Cuarţ	0	730	Polietilenă	-	2220
~	350	1170	Polistirol		1340
Cupru	-	395	Sticlă crown	10...50	670
Fontă	-	540...550	~ flint	10...50	500
Gheaţă	- 250	150	~ Jena	18	800
~	- 160	1000	~ pirex	26	780
~	-21...-1	2000...2100	Zinc	-	390
		***Lichide*:**			
Acetonă	-	2180	Fier lichid		830
Alcool etilic	0	2290	Glicerină	18...50	2430
~ ~	40	2710	Petrol lampant	-	2140...2170
~ metilic	12	2520	Sulfură de carbon	-	1005
Anilină	15	2150	Terebentină	18	1760
Apă de mare	17	3930	Tetraclorură de carbon	-	840
Benzen	10	1420	Toluen	18	1670
~	20	1720	Ulei de in	20	1840
~	40	1770	~ de maşini	-	2100
Benzină	-	1720	~ de parafină	20...60	2130...2260
~	50	2095	~ de ricin	20	2130
Cloroform	-	980	~ de transformator	20	1800...2090
Eter etilic	18	2340			

17. Căldura specifică izobară a elementelor chimice în J/(kg · K) (*ultima cifră nu este peste tot exactă*)

Elementul	*t*, °C	c_p	*Elementul*	*t*, °C	c_p
Aluminiu	- 240	38,5	Grafit	11	670
~	0	877	~	277	975
~	600	1180	~	827	1842
Argint	- 238	61,1	Iod	9...98	226
~	0	233	Litiu	0...19	3510
~	427	247	~	0...100	3890
Aur	- 185...20	146	Magneziu	- 186...79	791
~	18...99	127	~	18...99	1030
Bariu	- 185...20	284	~	225	1176
Beriliu	0...100	1780	Mangan	14...97	511
Bismut	- 186	119	Mercur	0	140,2
~	22...100	127	Molibden	- 185...20	264
Bor crist.	25	1195	~	15...91	301
~ amorf	0...100	1285	Nichel	0	444
Brom lich.	13...45	448	~	500	523
~ solid	- 78...- 20	352	Platină	- 186...18	122,6
Cadmiu	- 165	206	~	18...100	135,6
~	0	229	~	1230	167,4
Calciu	- 185...20	657	Plumb	- 250	60
~	0...100	624	~	0	126,4
Cobalt	- 182...15	343	~	300	141,5
~	15...100	431	Potasiu	- 23	725
~	15...630	515	~	27	800
Cositor	- 186...- 79	203,5	Siliciu crist.	- 185...20	515
~	0	224,5	~	77	762
Cositor lich.	240	268	~	727	938
Crom	- 200	280	Sodiu	- 150	1032
Cupru	- 250	14,6	~	0	1184
~	0	380	~	138	1335
~	97,5	398	Stibiu	- 186...79	193
Diamant	- 186	10,5	~	17...92	213
~	22	510	Sulf rombic	17...45	682
~	53	570	~ lichid	119...147	1060
~	827	1795	Uraniu	0	117
Fier	- 133	322	~	400	151
~	0	436	Wolfram	- 185...200	127
~	97,6	476	~	20...100	142
~	0...1100	641	Zinc	- 233	113,4
~ lichid	1530...3000	830	~	0	385
Germaniu	0...100	310	~	25	400
Grafit	- 188	105	~	0...100	435

18. Constantele termice ale unor elemente chimice

(presiunea 1 atm ; densitatea la 20^oC)

Temperaturile ***subliniate*** sunt ***punctele fixe fundamentale*** ale scării *internaționale* a temperaturilor

Elementul	Densit., kg/m^3	Temperatura topire, ^oC	Temper. fierb. , ^oC	Căld. latentă topire, kJ/kg
Aluminiu	2700	660,1	2400	400
Argint	10500	***960,8***	2180	105
Aur	19300	***1063,0***	2660	65
Azot	810 (- 196^oC)	- 210,0	- 195,8	25,6
Bismut	9800	271,3	1530	55
Brom	3100	- 7,3	58,2	67
Cadmiu	8650	320,9	767	55
Calciu	1550	850	1440	230
Cesiu	1900	28,6	713	16,8
Cobalt	8900	1492	2900	243
Cositor (staniu)	7300	231,9	2600	59
Crom	7100	1900	2600	280
Cupru	8960	1083	2580	205
Fier	7900	1539	2900	270
Fosfor (galben)	1820	44,2	280	21
Hidrogen	-	- 259	- 252	-
Iod	4900	113,6	183	50
Magneziu	1700	650	1100	377
Mercur	13550	- 38,87	356,58	11,7
Nichel	8900	1453	2820	306
Oxigen	1130 (- 184^oC)	- 218,8	***- 182,970***	13,8
Paladiu	12000	1552	3200	151
Platină	21450	1769	3800	113
Plumb	11300	327,3	1750	25
Potasiu (kaliu)	860	63,2	760	63
Seleniu	4800	217	685	352
Sodiu (natriu)	970	97,8	883	113
Stibiu (antimoniu)	16700	630,5	1440	163
Sulf	2100 (romb.)	119 (monocl.)	***444,600***	37,7 (romb.)
Taliu	11850	304	1460	29
Wolfram	19300	3380	5700	26
Zinc	7100	419,5	907	100

19. **Căldurile latente ale unor substanţe** (presiunea 1 atm)

Substanţa	ρ, kg/m^3 (t°C)	λ_t, kJ/kg (t_t°C)	λ_v, kJ/kg (t_v°C)
Acetonă	787 (25°C)	- (- 95°C)	520 (56,5°C)
Acid acetic	1050	184 (16,7°C)	- (118°C)
Alcool etilic	791 (15°C)	- (- 117°C)	860 (78,5°C)
~ metilic	810 (15°C)	- (93,9°C)	1120 (64,1°C)
Amoniac	0,77	- (- 77,7°C)	1370 (- 33,4°C)
Apă	-	335 (0°C)	2256,67 (100°C)
Azot	810 (- 196°C)	- (- 210,0°C)	200 (- 195,8°C)
Benzină	899 (15°C)	130	390 (80,2°C)
Ceară de albine	-	176 (62°C)	-
Eter	736 (15°C)	- (- 116°C)	370 (34,5°C)
Fier	7900	270 (1539°C)	58 (2900°C)
Fontă albă	-	130...140	-
~ cenuşie	7000	96...100 (1150°C)	-
Glicerină	1260 (15°C)	176 (20°C)	- (290°C)
Mercur	13550	- (- 38,87°C)	272 (356,58°C)
Naftalină	1140 (20°C)	151 (80,2°C)	- (218°C)
Oxigen	1130 (- 184°C)	- (- 218,8°C)	213 (- 182,970°C)
Parafină	900	150	- (390°C)
Sulfură de carbon	1290	- (- 111°C)	351 (46,3°C)
Terebentină	870	-	294 (160°C)
Tetraclorură de carbon	1630 (0°C)	- (- 23°C)	193 (76,7°C)

20. **Căldura latentă de vaporizare Λ a apei în kJ/kg**

t, °C	Λ, kJ/kg	t, °C	Λ, kJ/kg	t, °C	Λ, kJ/kg
0	2500,58	30	2429.97	90	2282,73
5	2488,87	40	2406,16	100	2256,67
10	2477,15	50	2382,12	130	2174,14
15	2465,40	60	2357,84	150	2114,30
20	2453,61	70	2333,22	170	2049,35
25	2441,80	80	2308,21	200	1940.40

21. Puterea calorifică a unor combustibili

Solide, în MJ/kg		*Lichide*, în MJ/kg	
Cărbune brun	9,3...9,9	Alcool etilic	27
~ mangal	29,7...33	~ metilic	29
Cocs	30,3	Benzină	46
Huilă	30,3	Păcură (Diesel)	42
Lemn uscat (paie)	8,3...10	Petrol	46
Turbă	15	~ lampant	43,1

Gaze, în MJ/Nm^3

Gaz de cocs	16,4	Metan	39
~ de iluminat	21		
~ natural	35,5	***Combustibil convențional*** :	**30 MJ/kg**

22. Densitățile unor substanțe în kg/m^3

Solide (la temperatura camerei : 17...23 ^{o}C)

Alamă	8500	Cupru	8890	Oțel	7800...7900
Aluminiu	2700	Duraluminiu	2800	Platină	21450
Argint	10400	Fier	7800	Plumb	11340
Aur	19300	Fontă	7000...7100	Plută	200...250
Constantan	8900	Gheață($0^{o}C$)	917	Sticlă	2400...2800
Cositor	7300	Nichel	8800...8900	Wolfram	19300
Cuarț crist.	2600	Nichelină	8800	Zinc	7000...7100

Lichide (la 15 ^{o}C)

Acetonă	792	Benzen	850...880	Lapte	1030
Alcool etilic	791	Benzină	700...900	Petrol	780...800
~ metilic	810	Eter	720...736	Ulei	900...950
Apă de mare	1027	Glicerină	1260	Terebentină	850...870

Gaze (în condiții *normale*)

Acetilenă	1,17	Azot	1,251	Hidrogen	0,0899
Aer	1,2928	Clor	3,220	Metan	0,7167
Amoniac	0,7708	CO_2	1,9768	Neon	0,900
Argon	1,783	Heliu	0,1785	Oxigen	1,429

CUPRINS

ANEXE

* * *

Lucrarea se adresează elevilor de clasa a X-a şi a XI-a, precum şi celor care se pregătesc pentru examenul de bacalaureat şi admitere în învățământul superior.

Conține 484 probleme de termodinamică.

Toate problemele sunt rezolvate complet şi amănunțit.



ISBN 973 - 98346 - 1 - 2

EDITURA APH - SRL
str. Caporal Preda nr. 12, sect. 5 Bucureşti
tel. 423.12.60, 425.84.77
http://www.edituraaph.go.ro